# Вязкая жидкость: механика движения

## Ньютоновские жидкости

Жидкости, для которых вязкое напряжение между соседними движущимися слоями пропорционально градиенту скорости, называются ньтоновскими

$$\tau = \eta \frac{du_y(x)}{dx}$$

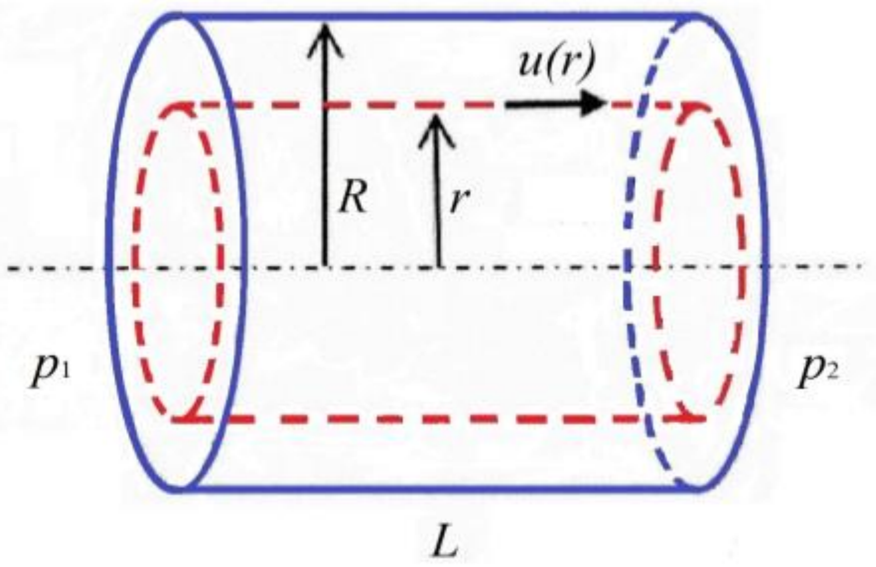
Ньютоновская жидкость будет течь, сколь малые силы к ней бы не прикладывались.

Ньютоновскими жидкостями являются вода, легкие моторные масла и многие другие жидкости, обычно состоящие из легких молекул.

# **Не**ньютоновская жидкость

# Вязкое течение по трубе, формула Пуазейля

$$\Delta p = p_1 - p_2 \qquad F_{внешн} = \pi r^2 \Delta p \qquad \tau = \eta\left(-\frac{du_y(r)}{dr}\right)$$




Минус потому, что *r* отсчитывается в сторону уменьшения скорости

$$F_{тр} = -2\pi r L\tau = 2\pi r L\eta\frac{du(r)}{dr}$$

$$F_{внешн} + F_{тр} = 0 \qquad \pi r^2\Delta p + 2\pi r L\eta\frac{du(r)}{dr} = 0$$

$$\frac{du(r)}{dr} = -\frac{r}{2\eta}\frac{\Delta p}{L} \quad \Rightarrow \quad u(r) = -\frac{r^2}{4\eta}\frac{\Delta p}{L} + const.$$

$$u(R) = -\frac{R^2}{4\eta}\frac{\Delta p}{L} + const = 0 \quad \Rightarrow \quad const = \frac{R^2}{4\eta}\frac{\Delta p}{L}$$

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4L\eta}(R^2 - r^2).$$

# Объем вытекающей жидкости

Выделим два коаксиальных цилиндра с радиусами *r* и *r* + *dr*. Можно считать, что жидкость между стенками цилиндров движется с одной и той же скоростью *u*(*r*). Тогда вытекающий за время *t* объем между стенками есть

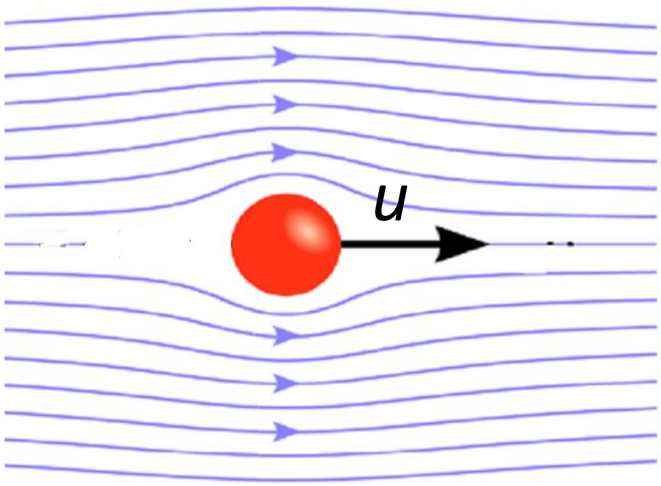
$$dV(r) = u(r)t2\pi r dr.$$

$$V(R) = t\int_0^R 2\pi r u(r)dr = t\frac{\pi}{2\eta}\frac{\Delta p}{L}\int_0^R (R^2 - r^2)rdr$$

$$V(R)/t = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta p}{L}R^4.$$ Формула Пуазейля

# На основе формулы Пуазейля работает капиллярный вискозиметр

# Движение шара, формула Стокса




$F$ = ?

Метод размерностей. В задаче есть всего четыре параметра: радиус шара $a$ (размерность см), плотность жидкости $\rho$ (г·см$^{-3}$), вязкость $\eta$ (г·с$^{-1}$·см$^{-1}$), скорость $u$ (см·с$^{-1}$).

Искомая сила $F$ имеет размерность г·см·с$^{-2}$. Единственная возможная комбинация размерностей:

$$F = const\,\eta a u.$$

Английский физик Стокс точно решил эту задачу: $F = 6\pi\eta a u.$

Формула Стокса (закон Стокса).

# Вискозиметр с падающим шариком



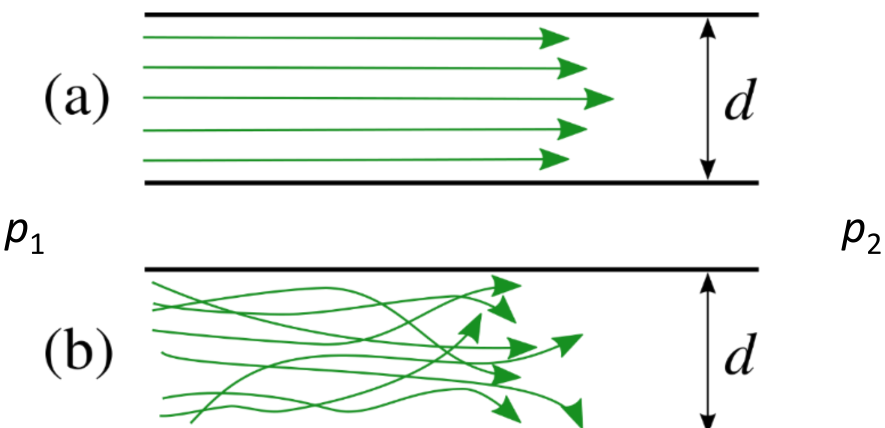
Падение шарика в вязкой жидкости под действием силы тяжести *P*:

$$u = \frac{1}{6\pi a\eta}(P - F_{выталк})$$

# Турбулентное течение

Течение жидкости может быть ламинарным (слоистым) или турбулентным

Лат. *turbulentus* — бурный, беспорядочный




При турбулентном течении по трубе из-за интенсивного перемешивания

(1) вязкость значения не имеет

(2) скорость $u$ от радиуса не зависит

## Для течения по трубе применяем метод размерностей

Перепад давления $(p_1 - p_2)/L = \Delta p / L$ г·см$^{-2}$·с$^{-2}$

Еще скорость *u* (см·с$^{-1}$), плотность *ρ* (г·см$^{-3}$) и радиус трубы *R* (см). Тогда для *u* можно получить формулу лишь единственным образом:

$$u = const\sqrt{\frac{\Delta p}{L}\frac{R}{\rho}}$$

Тогда расход $$V/t = \pi R^2 u = const\, R^{5/2}\sqrt{\frac{\Delta p}{L}\frac{1}{\rho}}$$

При ламинарном течении формула Пуазейля:

$$V(R)/t = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta p}{L}R^4.$$

Перехода из одного режима в другой: приравниваем две формулы. Получаем:

$$\Delta p / L \sim \eta^2 / \rho R^3$$

$$\Delta p / L \sim \eta^2 / \rho R^3$$

Подставляем в $u = const\sqrt{\frac{\Delta p}{L}\frac{R}{\rho}},$

Получаем $\frac{\rho u R}{\eta} \sim 1$

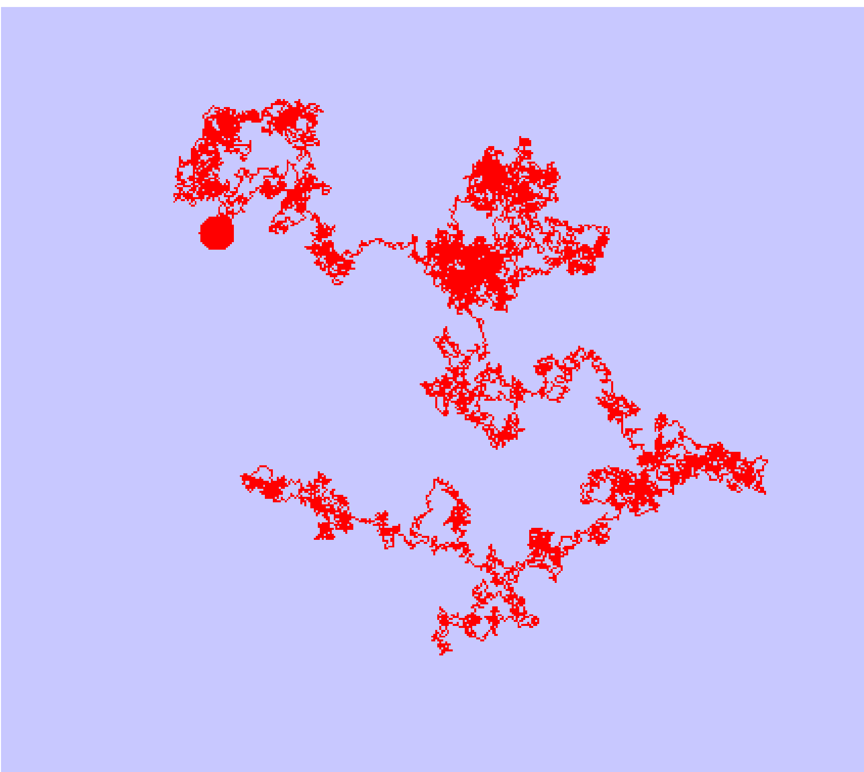
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u R}{\eta} = \frac{uR}{\nu},$$

Это число Рейнольдса

Опыт показывает, что движение по трубе является ламинарным при Re < 1700, а движение шара в жидкости – при Re < 1000. Формула Стокса работает только при Re < 1.

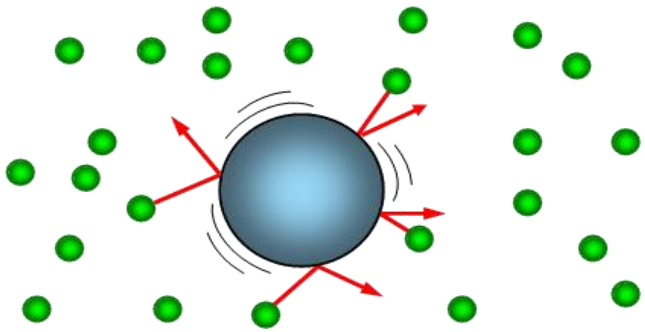
## Броуновское движение и диффузия

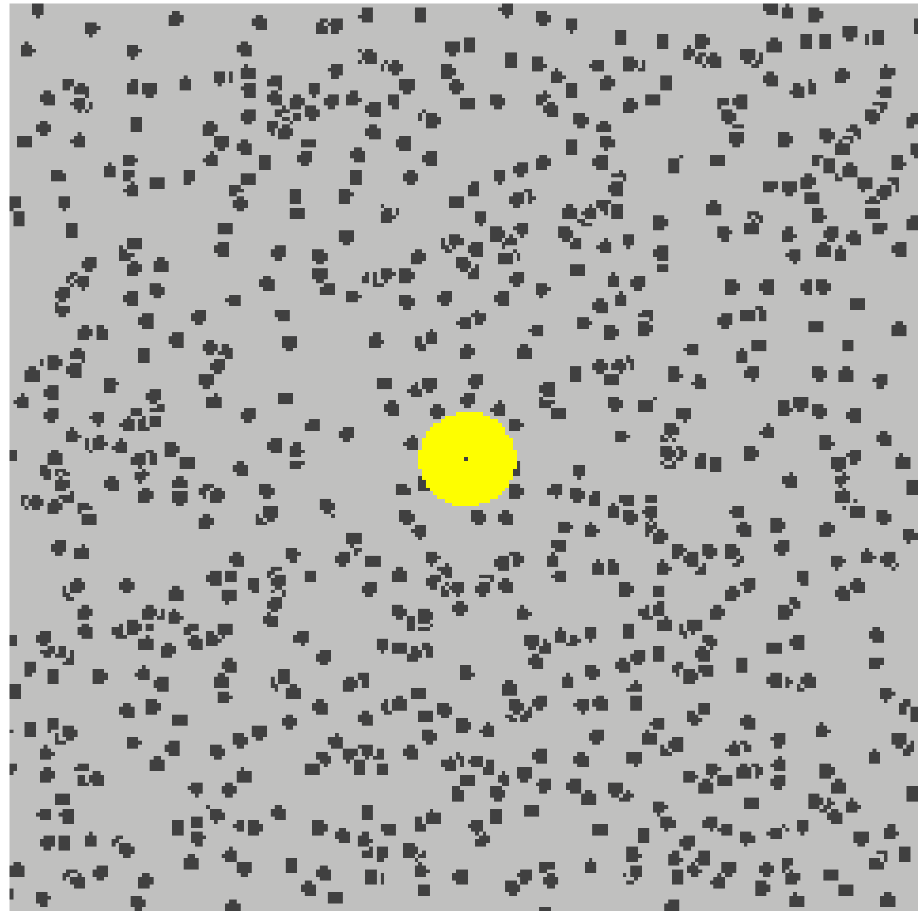
Броуновское движение – беспорядочное движение микроскопических видимых взвешенных в жидкости или газе частиц, вызываемое тепловым движением молекул жидкости или газа (размер несколько микрон).



Открыто  в 1827 году шотландским ботаником Робертом Броуном как видимое под микроскопом движение пыльцевых зёрен в жидкости

Объясняется совокупным действием столкновений с окружающими молекулами





Теория создана Эйнштейном (1905) и Смолуховским (1906) на основе молекулярных представлений

Экспериментальное изучение Перреном и объяснение им на основе теории (1908) стало доказательством молекулярной природы вещества

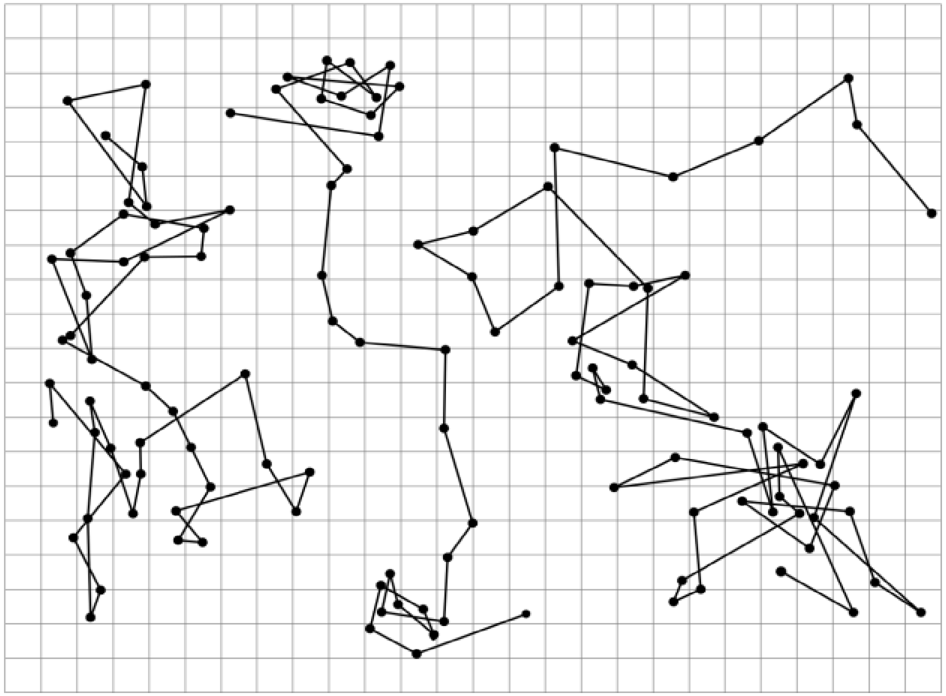


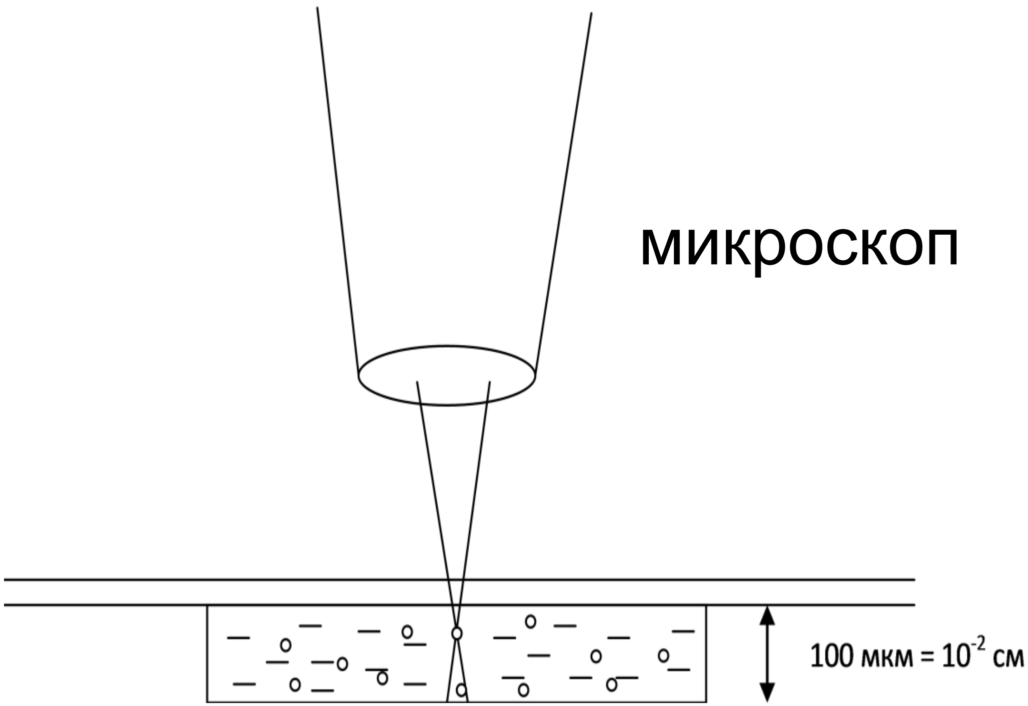
Рисунок из книги Перрена *Les Atomes* (1914). Последовательные положения частицы отмечены через каждые 30 секунд, шаг сетки 3,2 мкм.

Броуновская частица совершает случайные блуждания в пространстве.

Если в начальный момент времени пространственное распределение частиц неоднородно, то броуновское движение будет со временем это распределение выравнивать.

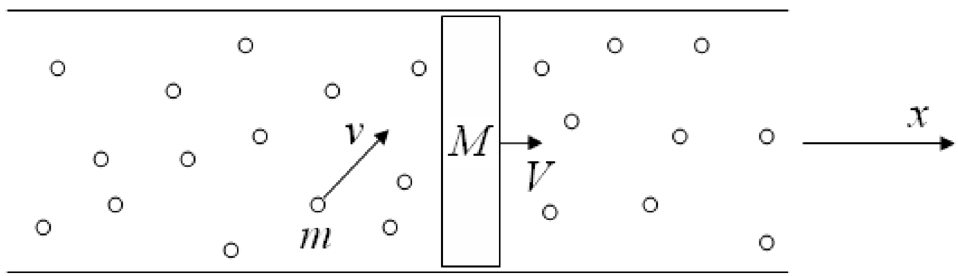
То есть броуновское движение приводит к диффузии.

Опыты Ж. Перрена

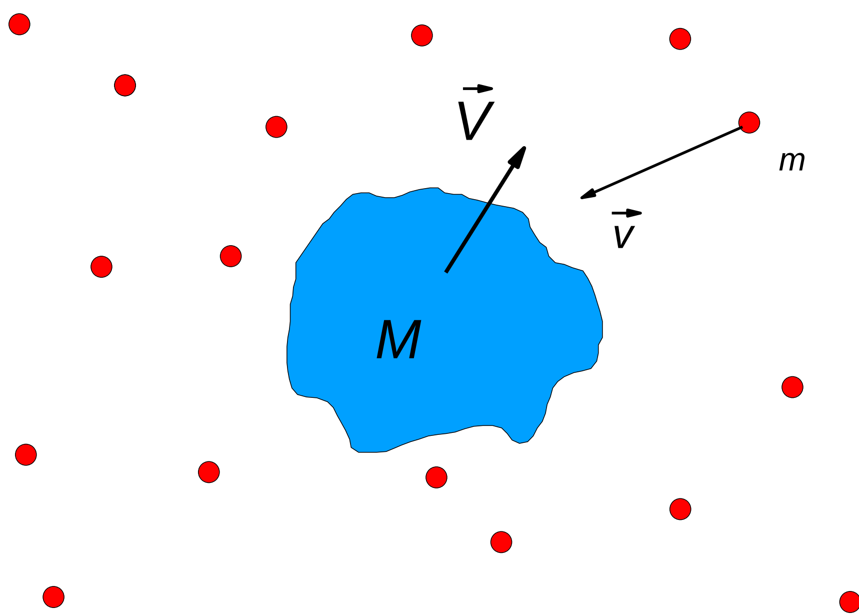



Плоская кювета с водой, в которой плавают частицы диаметром 0.37 микрона (эмульсия древесной смолы)

# Макроскопический поршень ведет себя как малая молекула




$$M\overline{V^2} = m\overline{v_x^2}.$$



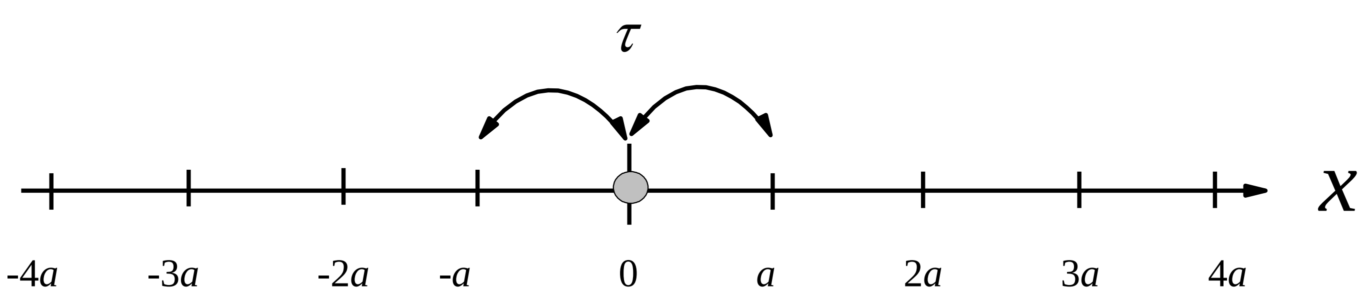

Взвешенная в воздухе или воде макроскопическая частица тоже «молекула»

$$M\frac{\overline{V^2}}{2} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$$

Размер порядка микрона

# Связь случайных блужданий и диффузии: модель одинаковых шагов

Частица совершает шаги величиной $a$ между фиксированными узлами вдоль координаты $x$ влево и вправо. Находится неподвижно в узле среднее время $\tau$ и затем быстро перескакивает в соседнее положение.




Перескок между соседними положениями
с равной вероятностью
влево и вправо со средним временем $\tau$

Пусть частица делает полное число шагов *K*, стартуя с начальной точки *k* = 0 (*k* = 0,1,2…*K*). Тогда

$$x_k = x_{k-1} \pm a$$

Средний квадрат перемещения

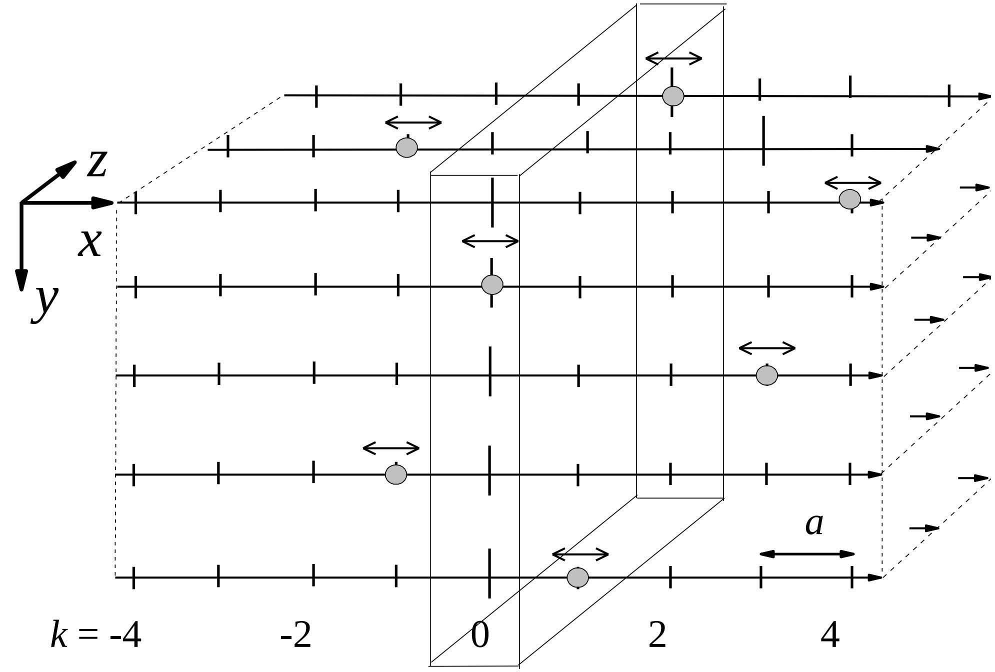
$$\overline{x_k^2} = \overline{x_{k-1}^2} \; \overline{\pm 2x_{k-1}a} + \overline{a^2} = \overline{x_{k-1}^2} + \overline{a^2} \quad \Longrightarrow \quad \overline{x_K^2} = a^2 K$$

Частица за время *t* сделает $K=t/\tau$ перемещений. Тогда

$$\overline{x^2(t)} = \frac{a^2}{\tau}t \qquad \overline{x^2(t)} = 2Dt \qquad \boxed{D = \frac{a^2}{2\tau}}$$

Среднеквадратичное перемещение частицы пропорционально времени, с *неким* коэффициентом пропорциональности *D*.

Надо перейти к плотностям *n*. Гипотетический трехмерный кристалл, в котором происходят одномерные перескоки вдоль оси *x*.




Поток частиц от *k*-го узла к (*k*+1)-му узлу через некоторую плоскость между ними:

$$J_{k\to k+1} = \frac{1}{2} n_k \frac{a}{\tau} - \frac{1}{2} n_{k+1} \frac{a}{\tau} = -(n_{k+1} - n_k)\frac{a}{2\tau} = -\frac{n_{k+1} - n_k}{a}\frac{a^2}{2\tau}$$

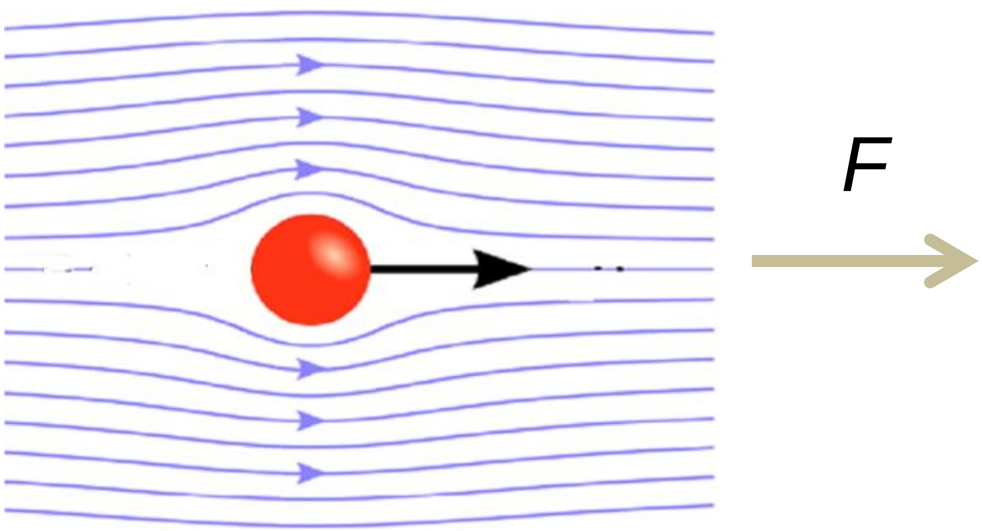
$$x = ka, \quad a \cong dx \qquad \frac{n_{k+1} - n_k}{a} \cong \frac{dn}{dx} \qquad J(x) \cong -D\frac{dn(x)}{dx}$$

$$D = \frac{a^2}{2\tau}$$

Коэффициент диффузии в этой модели

## Подвижность частиц

Движение шарика через вязкую жидкость под действием силы *F*

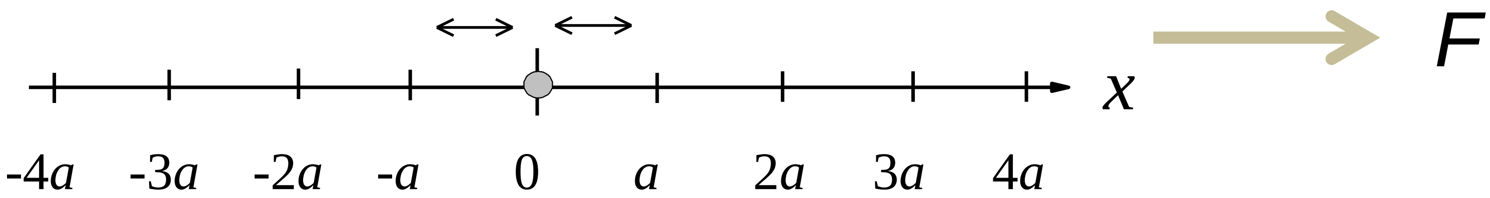



Формула Стокса

$$u = \frac{1}{6\pi a\eta} F = B \cdot F$$

Скорость движения пропорциональна силе, с коэффициентом пропорциональности *B.*
Эксперимент показывает, что пропорциональность имеет место для тел любой формы.

Одинаковые шаги, движение между узлами с постоянной скоростью $v = a/\tau$, в узлах случайное изменение знака




Сила *F* приводит к дополнительной скорости

$$\vec{V} = (\vec{F}/M)t \qquad \overline{\vec{V}} = \frac{\vec{F}}{M}\bar{t} = \frac{\tau}{2M}\vec{F} = B\vec{F}$$

Тоже пропорциональна силе. Коэффициент пропорциональности *B* называется подвижностью.

$$B = \frac{\tau}{2M}$$

## Связь диффузии и подвижности (модель одинаковых шагов)

$$M\frac{\overline{v^2}}{2} = M\frac{1}{2}\frac{a^2}{\tau^2} = \frac{kT}{2}$$

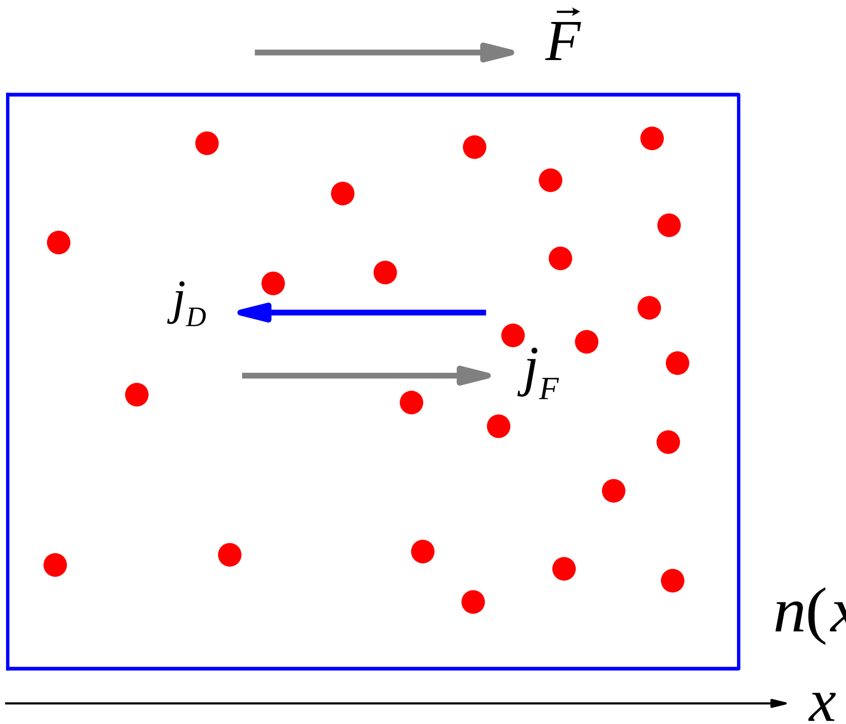
$$B = \frac{\tau}{2M} \qquad\qquad D = \frac{a^2}{2\tau}$$

$$\frac{D}{B} = \frac{Ma^2}{\tau^2} = kT$$

$$D = kTB$$

# Связь диффузии и подвижности: соотношение Эйнштейна

Броуновские частицы в среде в силовом поле (заряженные частицы в электрическом поле или частицы в поле сил тяжести)




$$\bar{V} = BF \Rightarrow j_F = n(x)\bar{V} = BFn(x)$$

$$j_D = -D\frac{dn}{dx}$$

$$j_F + j_D = BFn(x) - D\frac{dn}{dx} = 0.$$

Распределение Больцмана:

$$n(x) = n_0 \exp(-U(x)/kT) = n_0 \exp(Fx/kT)$$

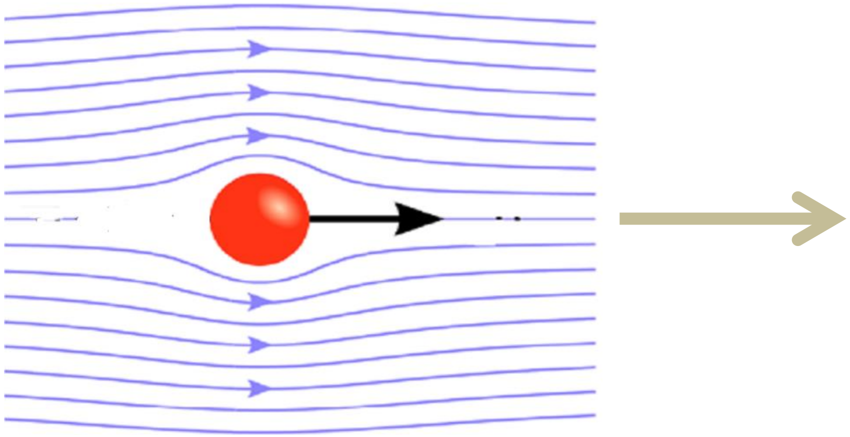
$$\frac{dn(x)}{dx} = n_0 \frac{F}{kT}\exp(Fx/kT) = \frac{F}{kT}n(x)$$

$$BFn(x) - D\frac{F}{kT}n(x) = 0$$

$$D = kTB$$

Соотношение Эйнштейна

# Формула Стокса-Эйнштейна



$$\vec{F}$$

$$u = \frac{1}{6\pi a\eta} F$$

$$B = \frac{1}{6\pi a\eta}.$$

$$D = kTB = \frac{kT}{6\pi a\eta}$$

**Формула Стокса – Эйнштейна**

Эксперимент показывает, что это формула работает и для молекул

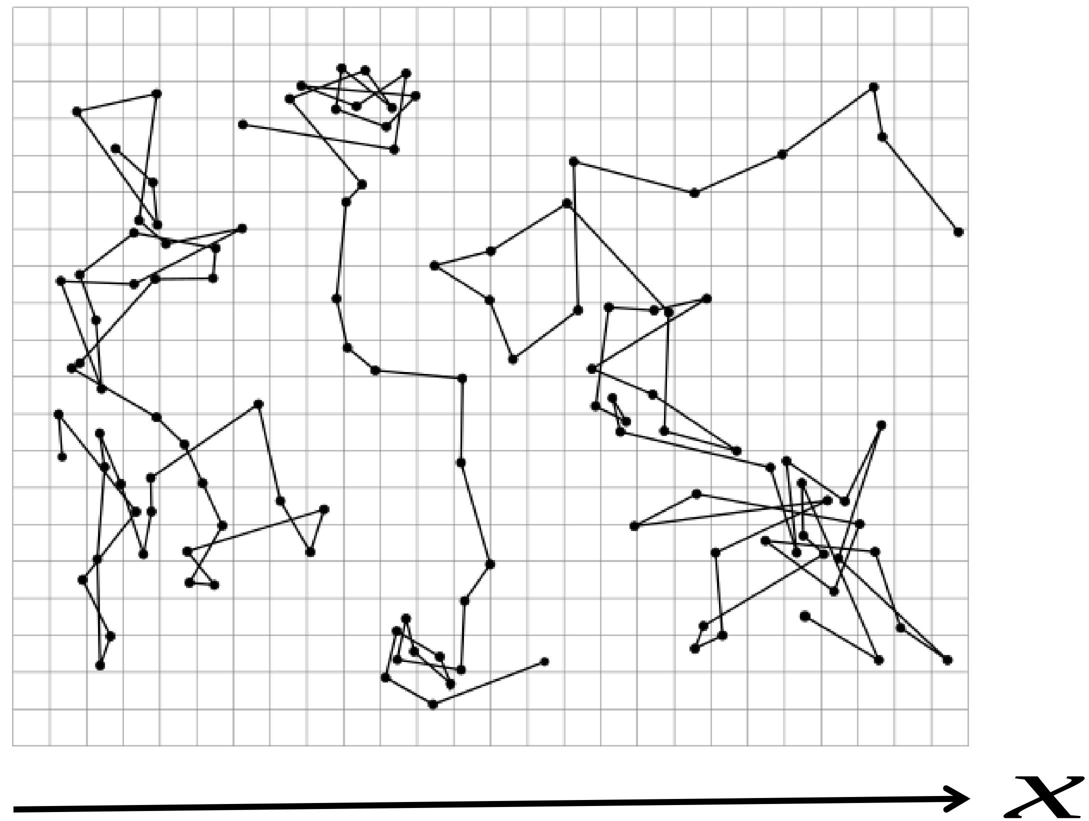
Оценки $D$ для молекул воды (самодиффузия).
Вязкость воды при 25°С около $10^{-2}$ П. Возьмем радиус $a$ равным 1 ангстрему ($10^{-8}$ см). Тогда $D$ ~ 2,2 $10^{-5}$ см$^2$/с.

# Средний квадрат перемещения броуновской частицы

Докажем, что

$$\overline{x^2(t)} = const \cdot t$$

для общего случая,
когда шаги неодинаковы




Разобьем на $K$ одинаковых интервалов $\tau = t/K$. $x(0) \equiv x_0 = 0$

$$x(t) \equiv x_K \equiv (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_K - x_{K-1}) = \sum_{k=1}^{K} (x(t_k) - x(t_{k-1}))$$

При большом $\tau$ корреляции между последовательными перемещениями нет

$$\overline{(x_k - x_{k-1})(x_j - x_{j-1})} = 0 \quad (k \neq j)$$

$$\overline{x^2(t)} = \sum_{k=1}^{K} \overline{(x_k - x_{k-1})^2}$$

Из эквивалентности всех положений в пространстве результаты усреднения каждого из членов для многих частиц могут зависеть только от $\tau$ и должны быть равны друг другу, т.е. равны некоторой величине

$$A(\tau) \equiv \overline{(x_k - x_{k-1})^2}$$

$$K = t/\tau \quad \Rightarrow \quad \overline{x^2(t)} = A(\tau)K = A(\tau)t/\tau$$

От величины $\tau$ результат зависеть не должен. Такое может быть только при линейной зависимости

$$A(\tau) = const \cdot \tau$$

Тогда

$$\overline{x^2(t)} = const \cdot t$$