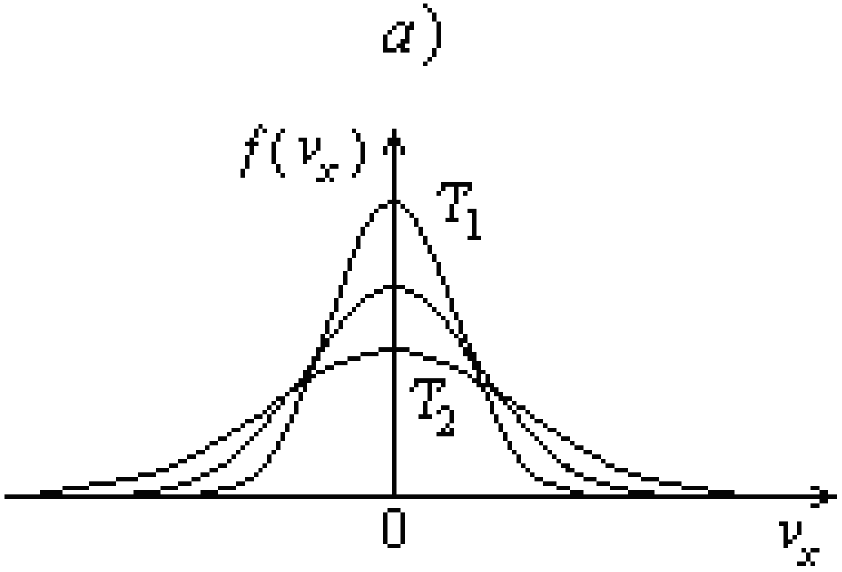
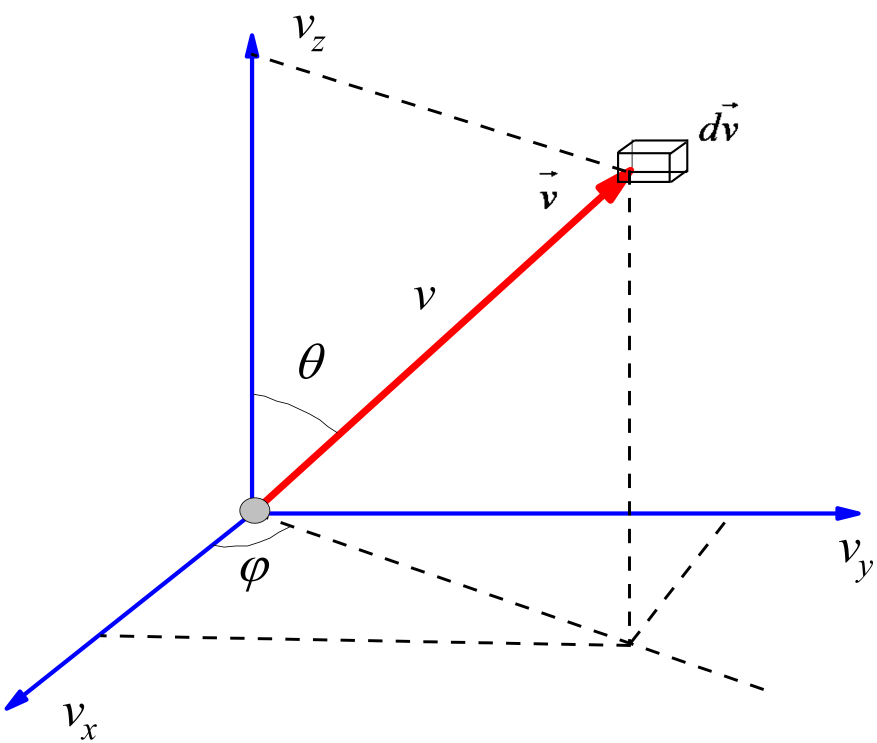
$$dW(v_{x(y,z)}) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_{x(y,z)}^2}{2kT}\right) dv_{x(y,z)}$$



Одномерное распределение Максвелла

Трехмерное распределение Максвелла

$$dW(\vec{v}) = dW(v_x)dW(v_y)dW(v_z)$$



$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$$

$$d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$$

$$dW(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\vec{v}$$

В сферических координатах

$$dW(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

После интегрирования по по углам θ и φ получается распределение по величине (модулю) скорости:

$$\int d\Omega \equiv \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi$$

$$dW(v) \equiv \int_{\theta} \int_{\varphi} dW(\vec{v}) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 dv$$

Распределение Максвелла, сводка

$$dW(v_{x(y,z)}) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp(-\frac{mv_{x(y,z)}^2}{2kT})dv_{x(y,z)}$$

Одномерное,
для проекций скорости

$$dW(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp(-\frac{mv^2}{2kT})d\vec{v}$$

Трехмерное,
для вектора скорости

$$\begin{pmatrix} d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z \\ d\vec{v} = v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi \end{pmatrix}$$

$$dW(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2 dv$$

Для абсолютного
значения (модуля)
скорости

На чем был основан вывод.

- Равнозначность направлений движения (изотропия пространства)

$$dW(v_x) = f(v_x)dv_x,$$
$$dW(v_y) = f(v_y)dv_y,$$
$$dW(v_z) = f(v_z)dv_z.$$

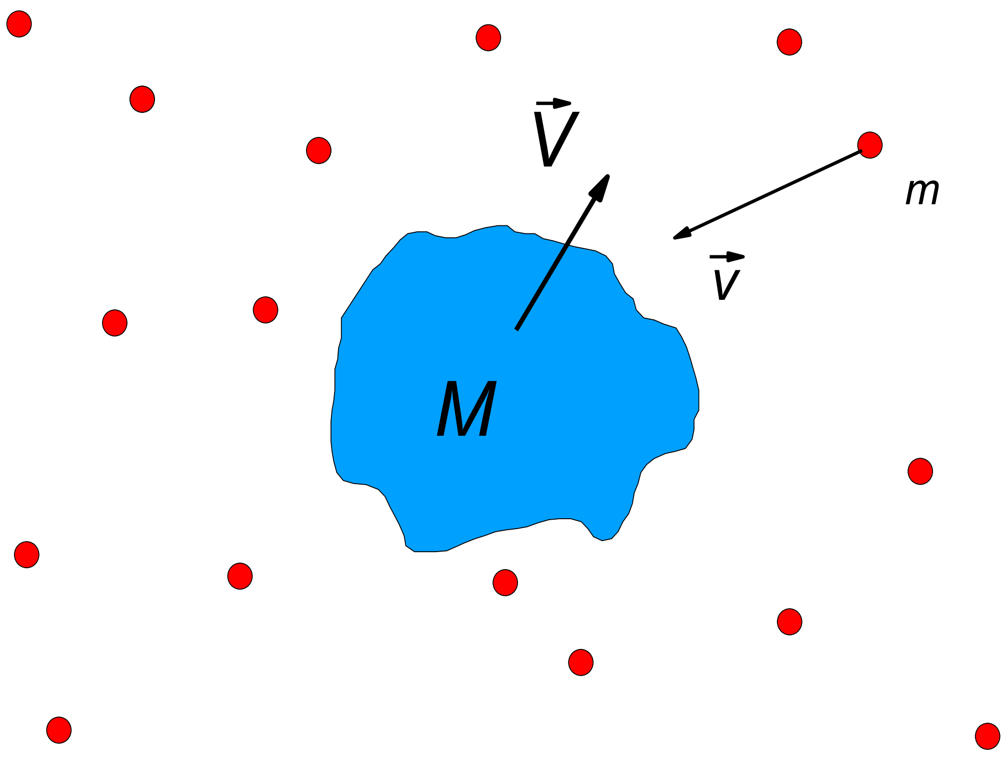
- Независимость от направления движения

$$dW(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})d\mathbf{v} \qquad g(\mathbf{v}) = g(v)$$

- Независимость движения вдоль трех пространственных координат

$$dW(\mathbf{v}) = dW(v_x)dW(v_y)dW(v_z).$$

Взвешенная в воздухе или воде макроскопическая частица тоже «молекула» - и ее скорости движения тоже подчиняются распределению Максвелла

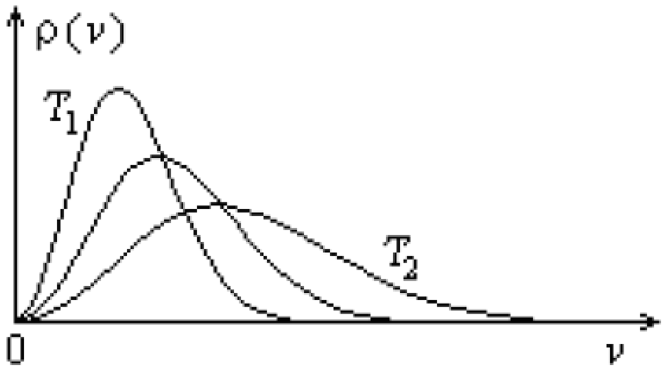


$$M\frac{\overline{V^2}}{2} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$$

Наиболее вероятная скорость молекул

$$\rho(v) = dW(v)/dv \propto \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v^2$$

(Значок $\propto$ означает пропорциональность)



$$\frac{d\rho(v)}{dv} = 0$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Средняя скорость молекул

$$\bar{v} = \int_0^1 v\,dW(v) = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3\exp(-\alpha v^2)\,dv = -4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty v\exp(-\alpha v^2)\,dv =$$

$$= -4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\ .$$

Гамма-функция

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

Если a является целым положительным числом, $a \equiv n$:

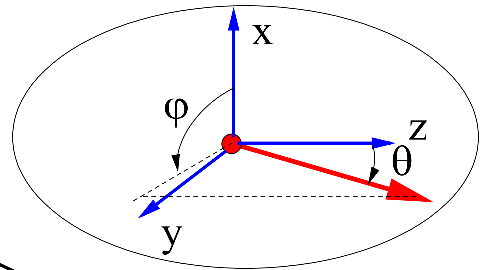
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

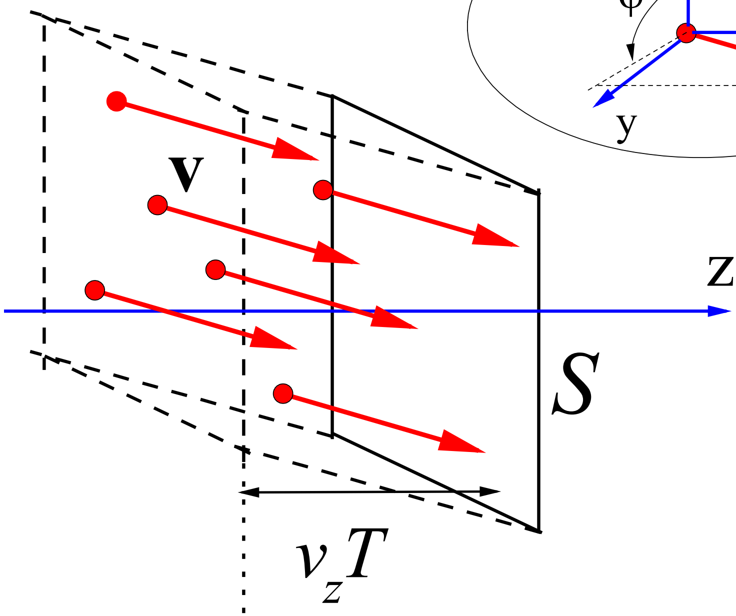
Наиболее вероятная скорость	v_m	$\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$
Средняя скорость	$\overline{v}$	$\sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$
Среднеквадратичная скорость	$\sqrt{\overline{v^2}}$	$\sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$

$$\frac{3}{2}kT = \frac{m\overline{v^2}}{2};$$

Для справки: скорость звука в газе $$v_{зв} = \sqrt{\frac{5\pi}{24}}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \cong 0.8\overline{v}$$

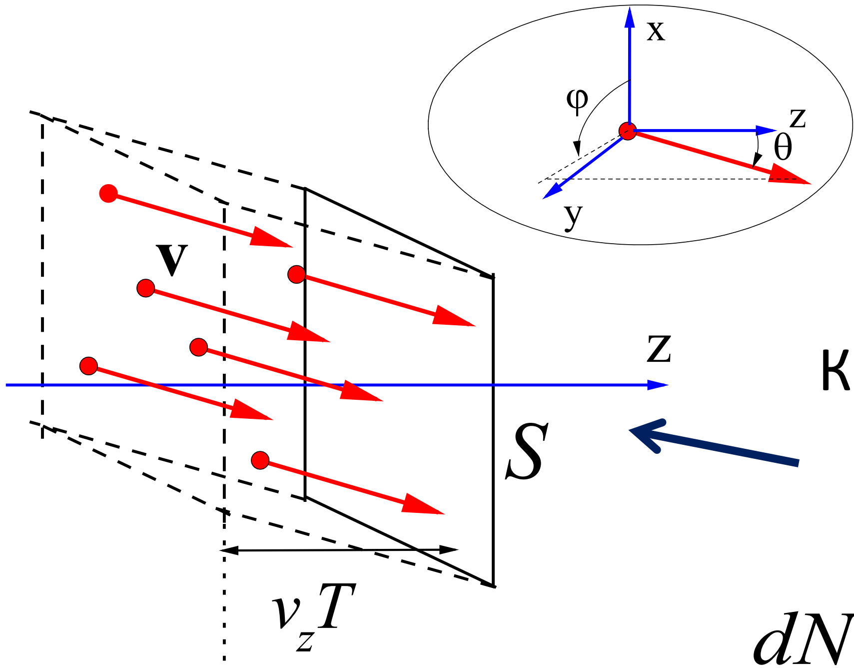
Молекулярные потоки





$$dW(\mathbf{v})$$

Рассмотрим молекулы, падающие на стенку площади S за время T и имеющие близкие векторы скорости. Их вероятность $dW(\mathbf{v})$. Векторы **v** лежат в наклонном параллелепипеде с основанием S и высотой $v_z T$.



Плотность газа $n = \frac{N}{V}$

Количество таких молекул :

$$dN(\mathbf{v}, S, T) = STv_z n dW(\mathbf{v})$$

Потоком молекул называется их количество, падающее на единицу площади за единицу времени

$$dJ(\mathbf{v}) \equiv dN(\mathbf{v}, S, T) / S / T = v_z n dW(\mathbf{v})$$

Эта дифференциальная плотность потока молекул

$$dW(\mathbf{v}) = dW(v_x)dW(v_y)dW(v_z)$$

$$\Downarrow$$

$$dJ(\mathbf{v}) = v_z n dW(v_x)dW(v_y)dW(v_z)$$

Если движение вдоль осей x и y неважно:

$$dJ(v_z) = \quad nv_z dW(v_z)\int_0^1 dW(v_x)\int_0^1 dW(v_y) = nv_z dW(v_z)$$

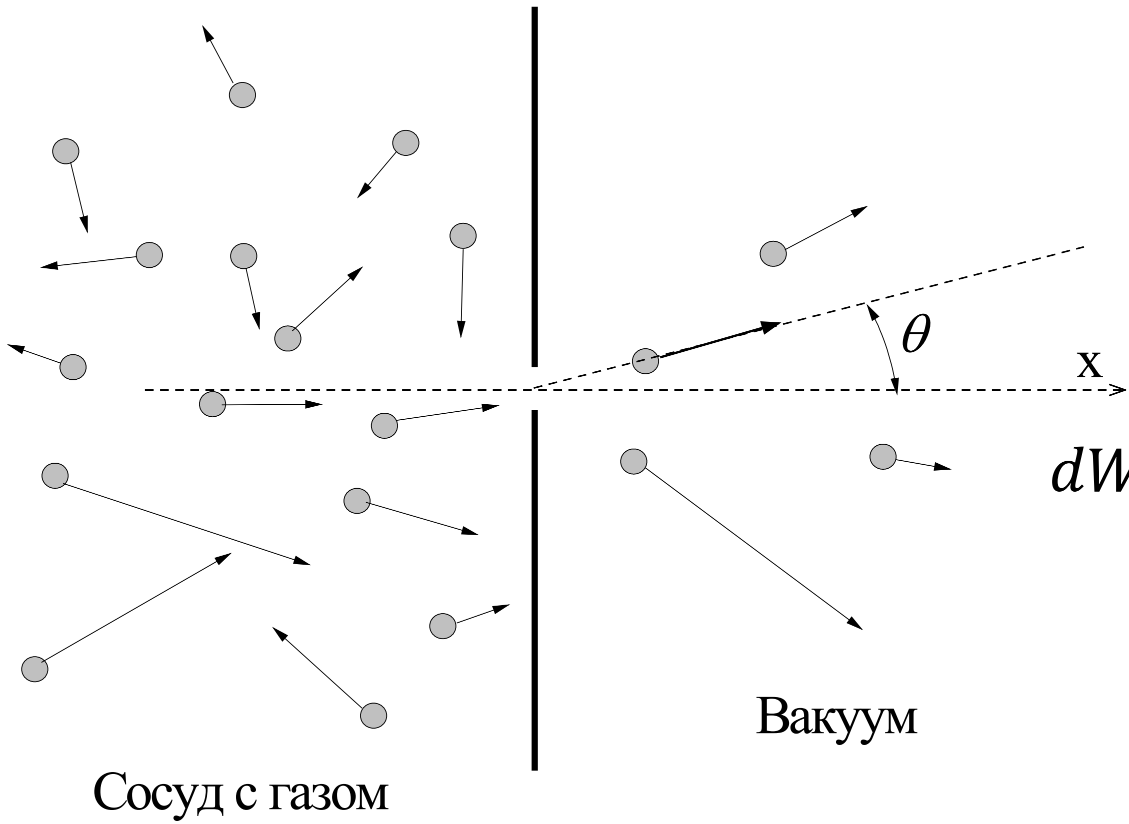
Полный поток $J = n\int\limits_{v_z>0} v_z dW(v_z) = n\int_0^\infty v_z f(v_z)dv_z = n\sqrt{\dfrac{kT}{2\pi m}} = \dfrac{1}{4}n\overline{v}$

В сферической системе координат

$$dW(\mathbf{v}) = dW(v)dW(\theta,\varphi) = dW(v)\frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi}$$

$$v_z = v\cos\theta \qquad\qquad dJ(\vec{v}) = v\,n\,dW(v)\frac{\cos\theta\sin\theta\,d\theta d\varphi}{4\pi}.$$

Молекулы, истекающие через малое отверстие в сосуде в вакуум, называются молекулярным пучком. Все формулы как для потока



$$dW(\vec{v}) = dW(v)dW(\theta,\varphi)$$

$$= dW(v)\frac{\sin\theta\, d\theta d\varphi}{4\pi}$$

$$v_z = v\cos\theta$$

$$dW(\vec{v}) = dW(v)\frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi} \Longrightarrow dJ(\vec{v}) = v\,n\,dW(v)\frac{\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\varphi}{4\pi}.$$

Поделим на полный поток, получим вероятность для вектора скорости в пучке:

$$dW_J(\vec{v}) = \frac{dJ(\vec{v})}{J} = \frac{v}{\bar{v}} dW(v) \frac{\cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi}{\pi} = dW_J(v) dW_J(\Omega)$$

$$dW_J(\mathbf{v}) = dW_J(v) dW_J(\Omega)$$

Для скаляра скорости:

$$dW_J(v) = \frac{v}{\bar{v}} dW(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{kT}\right)^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^3 dv \qquad \int dW_J(v) = 1$$

$$dW_J(\Omega) = \frac{1}{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \qquad \int\limits_{0<\theta<\pi/2,\, 0<\varphi<2\pi} dW_J(\Omega) = 1$$

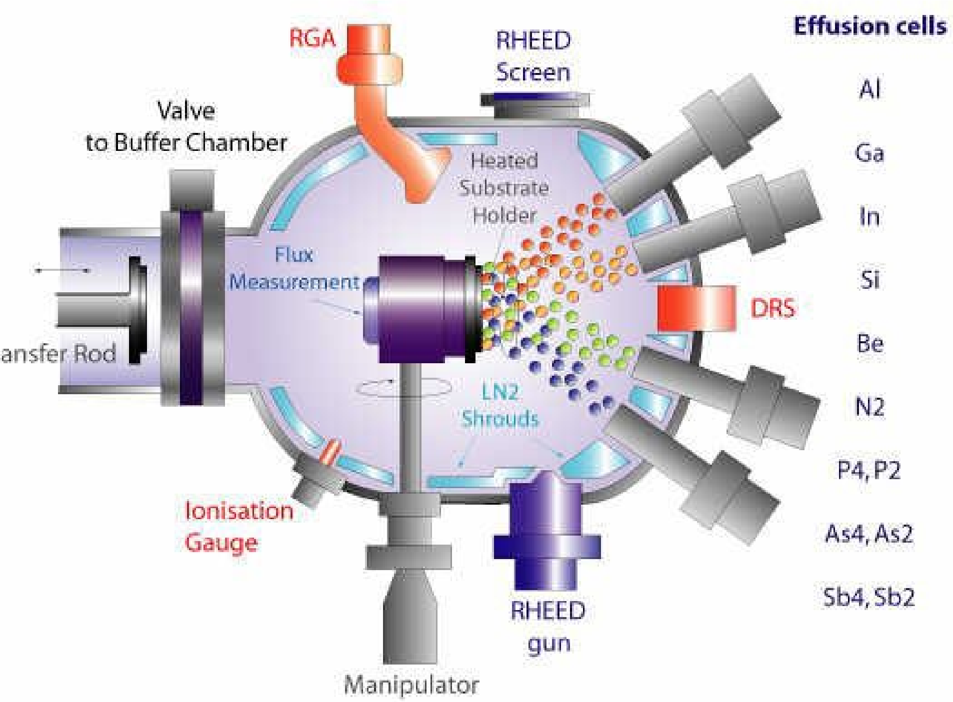
Средняя скорость и энергия в пучке

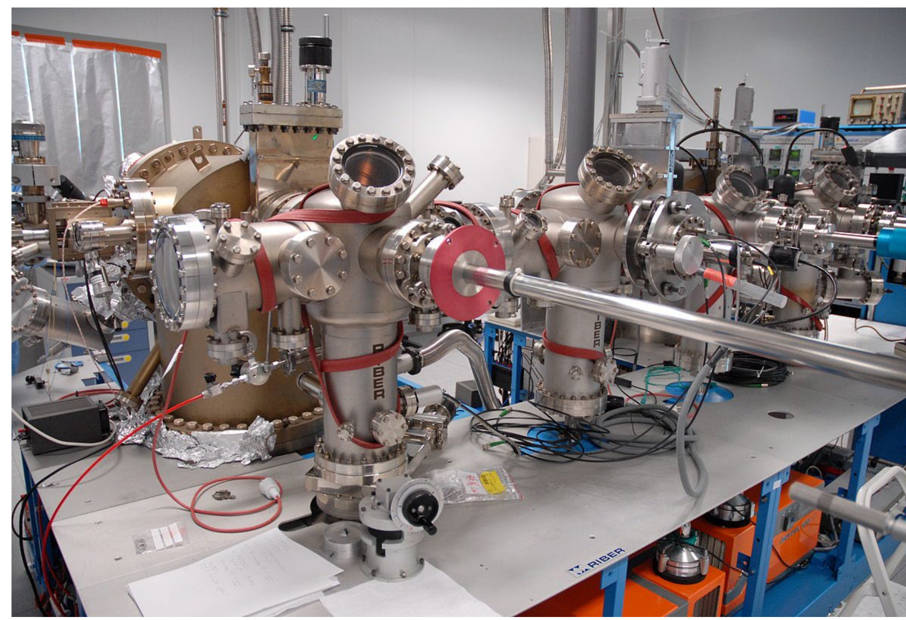
$$\overline{v_J} = \int v\,dW_J(v) = 3\sqrt{\frac{\pi kT}{8m}} = \frac{3\pi}{8}\overline{v}, \quad \overline{\varepsilon_J} = \frac{1}{2}m\int v^2 dW_J(v) = 2kT.$$

В пучке молекулы движутся быстрее, чем в объеме. Средняя энергия тоже больше, на *kT*/2

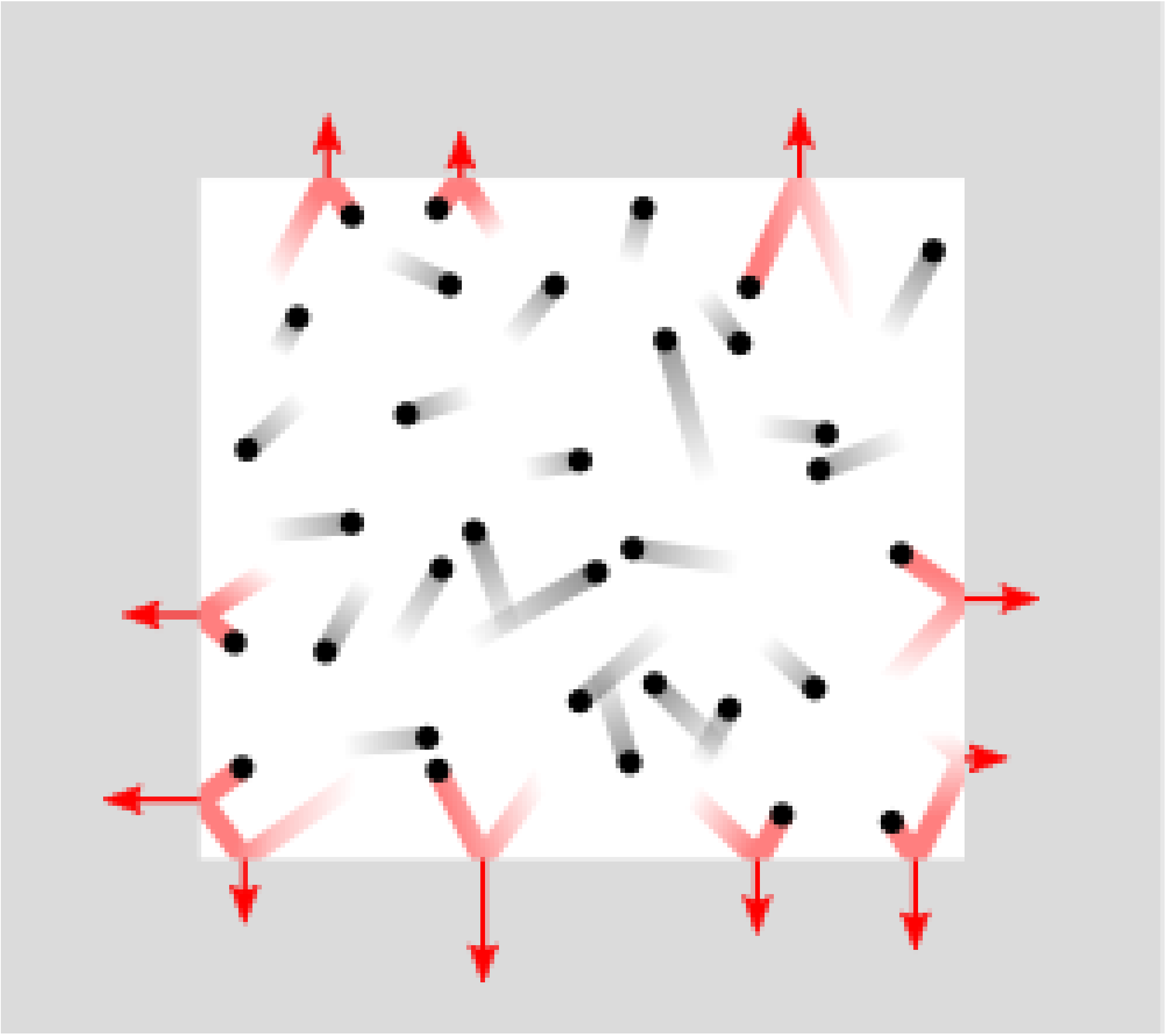
Молекулярно-лучевая эпитаксия в физике полупроводников

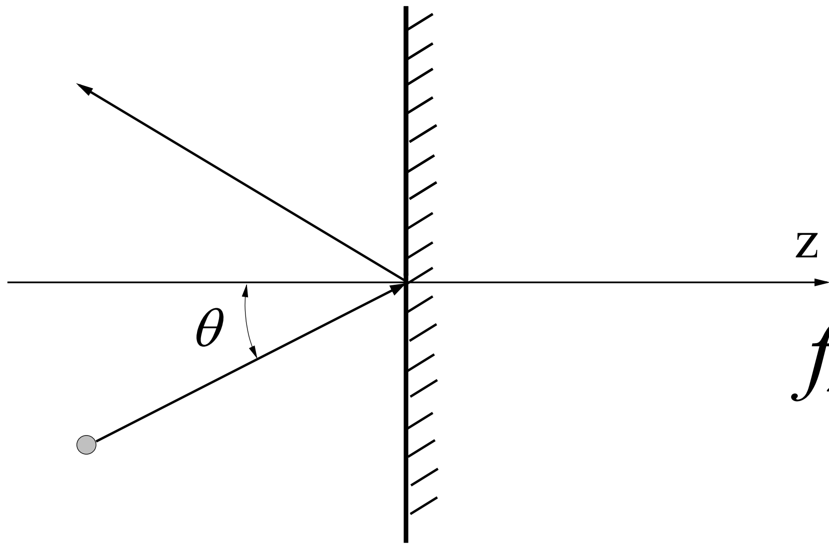
Эпитакси́я упорядоченное нарастание одного кристаллического материала на другом (от греч. επι — *на* и ταξισ — *упорядоченность*),

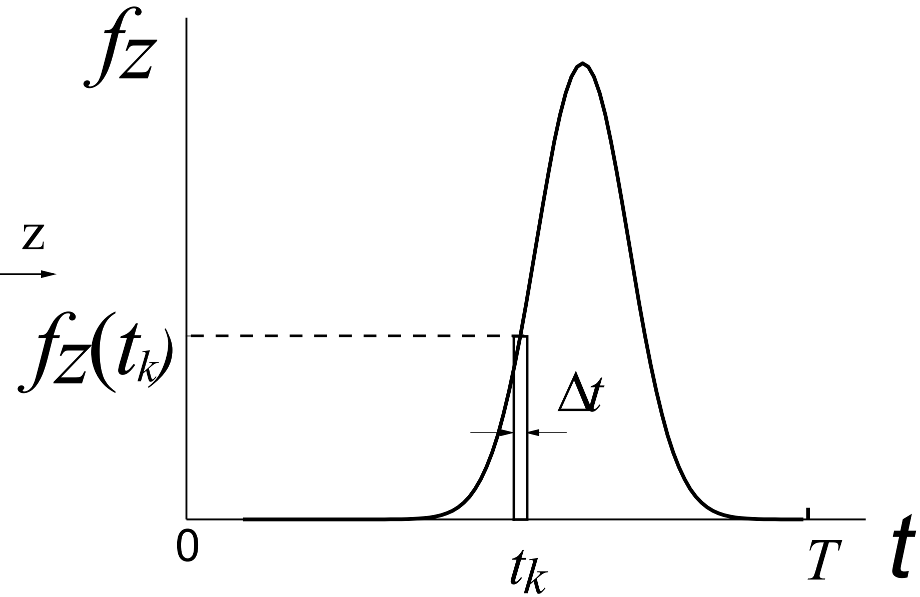




Давление идеального газа







За время *T* действует средняя сила

$$< f_z(t) >_T = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_z(t_k) = \frac{1}{N\Delta t}\sum_{k=1}^{N} f_z(t_k)\Delta t \cong \frac{1}{T}\int_0^T f_z(t)dt$$

Уравнение Ньютона

$$m dv_z(t) = -f_z(t)dt$$

$$< f_z(t) >_T = -\frac{1}{T} m \int_{v_z(0)}^{v_z(T)} dv_z = \frac{2mv_z}{T}$$

$$v_z(T) = -v_z(0)$$

Одна молекула $\Rightarrow$ все молекулы (со скоростью v_z):

$$dN(v_z, S, T) = dJ(v_z)ST = STnv_z dW(v_z)$$

$$dF_z(v_z) = < f_z(t) > dN(v_z, S, T) = 2mv_z^2 SndW(v_z)$$

Теперь учтем все v_z:

$$F_z = \int_{v_z>0} dF_z(v_z) = 2mnS \int_{v_z>0} v_z^2 dW(v_z) = mn\overline{v_z^2}S$$

$$p = F_z / S = mn\overline{v_z^2}$$

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}.$$

$$p = \frac{2}{3} n \frac{\overline{mv^2}}{2}.$$

Для падающих на стенку молекул идеального газа

$$m\frac{\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$$

$$\Downarrow$$

$$p = nkT.$$

$$p = nkT.$$

Уравнение состояния идеального газа

$$n = \frac{N}{V} \qquad N = \frac{M}{\mu} N_A, \qquad pV = \frac{M}{\mu} RT$$

$$R = N_A k \qquad R = 8{,}31 \cdot 10^7 \text{ эрг/(моль·К)} = 8{,}31 \text{Дж/(моль·К)}.$$

В воздухе n = 6,02 10^{23}/22400 = 2,7 10^{19} .
Тогда при T = 273 К p = 1.01 10^6 дин/см^2

Давление измеряется в системе СГС в дин/см^2, в системе СИ – в ньютон/м^2. Последняя единица называется также паскалем (Па). Есть внесистемные единицы. 1 бар = 10^6 дин/см^2 = 10^5 Па (0.1 МПа). Численно бар близок к нормальному атмосферному давлению. Давление в 760 мм рт. ст. (стандартная или техническая атмосфера) соответствует 1,013 бар. Есть еще техническая атмосфера, соответствующая давлению в 1кгс/см^2, она равна 0,98 бар.

Следствия уравнения идеального газа :

$$p = nkT.$$

$$pV = \frac{M}{\mu} RT$$

При постоянной температуре закон Бойля – Мариотта:

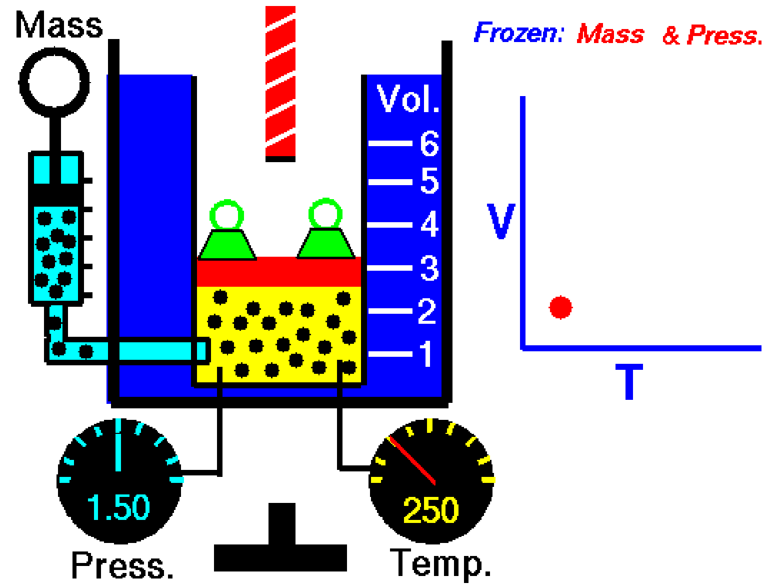
$$pV = const.$$

При постоянном объеме – закон Шарля:

$$p = const\ T.$$

При постоянном давлении – закон Гей-Люссака:

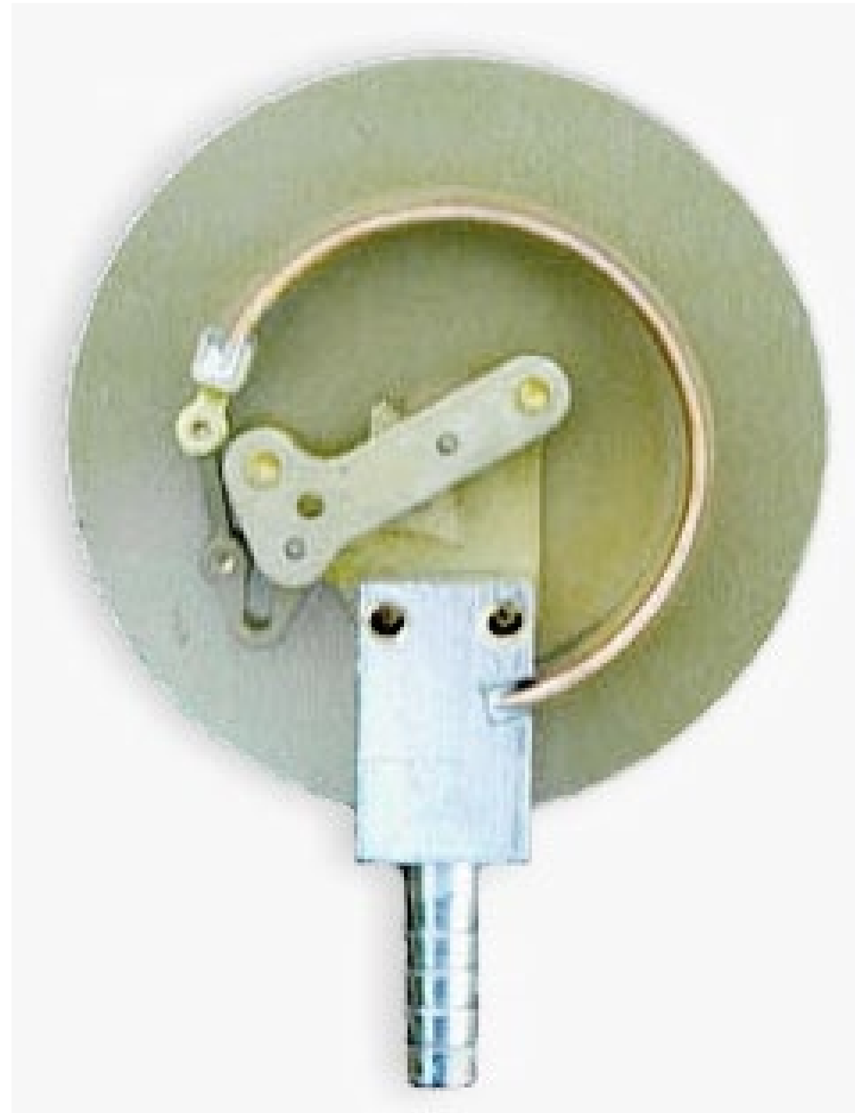
$$V = const\ T.$$



Закон Авогадро $n = \dfrac{p}{kT}$

(число частиц в единице объема зависит от давления и температуры, но не зависит от природы самих частиц).

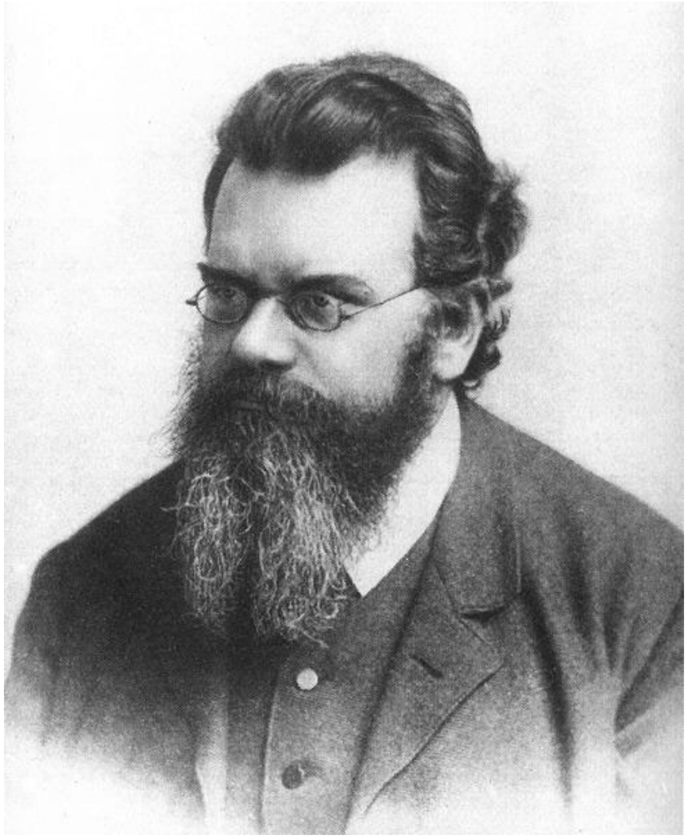
Давление измеряется манометрами



Газовый термометр – это тоже манометр

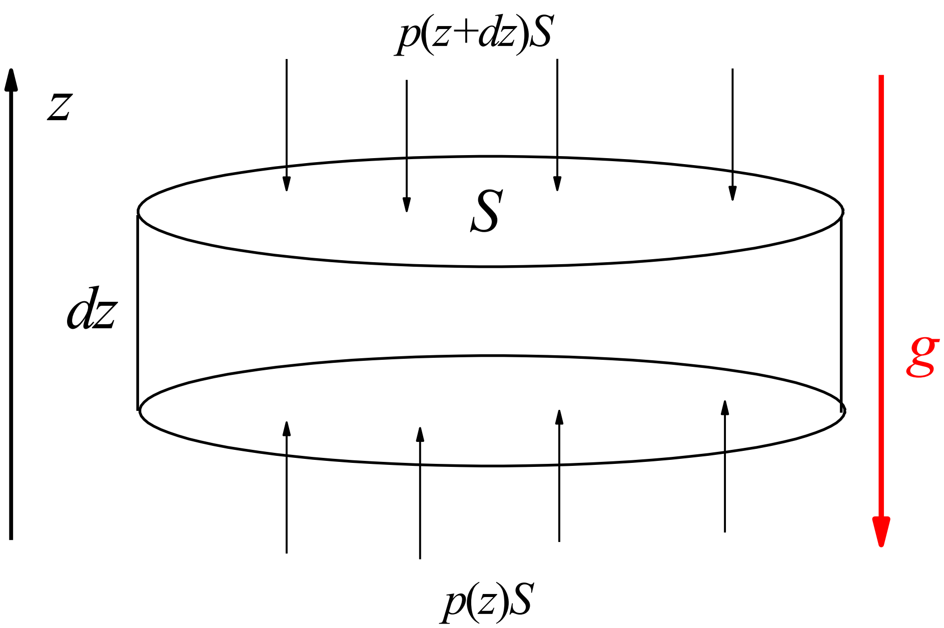
$$T = \frac{pV}{nk} = \frac{pV}{\nu R}$$

Распределение Больцмана



Австрийский физик Людвиг Больцман 1844 - 1906

Барометрическая формула



Газ в поле силы тяжести при постоянной температуре (например воздух в атмосфере)
Выделим малый слой толщины *dz*.
Введем зависимость давления и плотности от *z*, *p*(*z*) и *n*(*z*)

Разность сил сверху и снизу: $dF = (p(z) - p(z+dz))S = -Sdp(z).$

Равна весу слоя $dG = mn(z)gSdz$

$$dp(z) = -mn(z)gdz.$$

Так как $p(z) = n(z)kT$, то

$$\frac{dn(z)}{n(z)} = -\frac{mg}{kT}dz$$

Интегрируем

$$n(z) = n(0)\exp(-\frac{mgz}{kT})$$

Барометрическая формула

$$p(z) = p(0)\exp(-\frac{mgz}{kT})$$

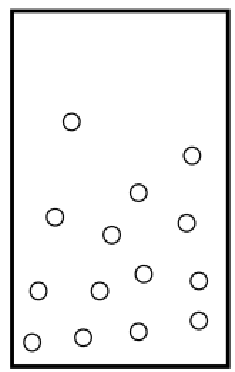
27

Пример. Газ внутри сосуда с постоянным сечением S и высотой h. Полное число молекул N

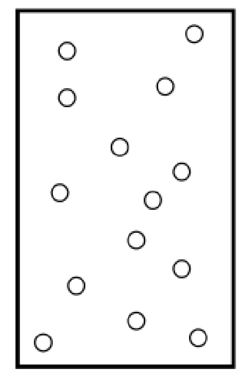
$$n(z) = n(0)\exp(-\frac{mgz}{kT})$$

$$N = \int_0^h n(z)Sdz = n(0)\,S\,\frac{kT}{mg}\left(1-\exp(-\frac{mgh}{kT})\right). \Rightarrow \quad n(0) = \frac{N}{S}\frac{mg}{kT}\frac{1}{1-\exp(-\frac{mgh}{kT})}.$$

Два крайних случая



$mgh/kT >> 1$



$mgh/kT << 1$

$$n(0) = \frac{N}{S}\frac{mg}{kT} \qquad\qquad n(0) \approx \frac{N}{Sh}$$

$$n(z) \approx \frac{N}{S}\frac{mg}{kT}\exp(-\frac{mgz}{kT}) \qquad\qquad n(z) \approx n(0) \approx \frac{N}{Sh}$$

Равенство $mgh = kT$ при $h_0 = \dfrac{kT}{mg}$

Для комнатной температуры для молекул воздуха:

$$h_0 = 1{,}38\ 10^{-16}\text{г}\,\frac{\text{см}^2}{\text{с}^2}\,\frac{1}{\text{К}} \cdot 300\ \text{К} \cdot \frac{6\ 10^{23}}{29\ \text{г}} \cdot \frac{1}{980}\,\frac{\text{с}^2}{\text{см}} \approx 10^6\text{см}$$
$$= 10\ \text{км}$$