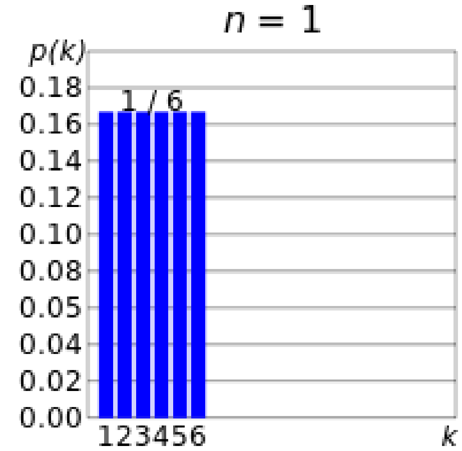
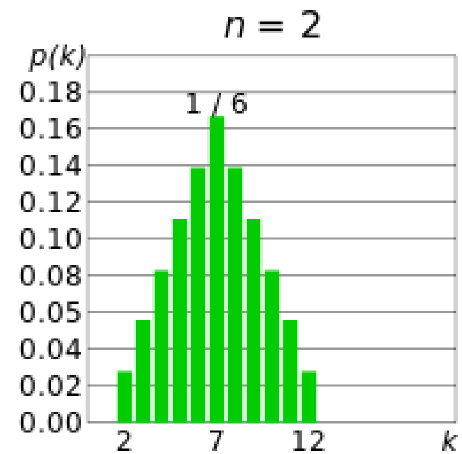
Функция распределения случайной величины – это набор вероятностей всех возможных ожидаемых событий.

Пример: При бросании кубиков событием является выпадающая сумма:

«Сумма» = 1, 2 …6

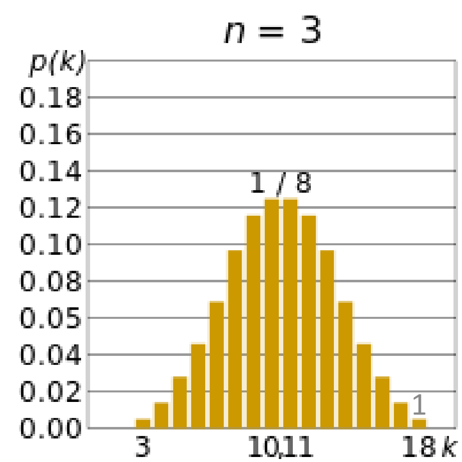


Сумма = 2, 3 …12



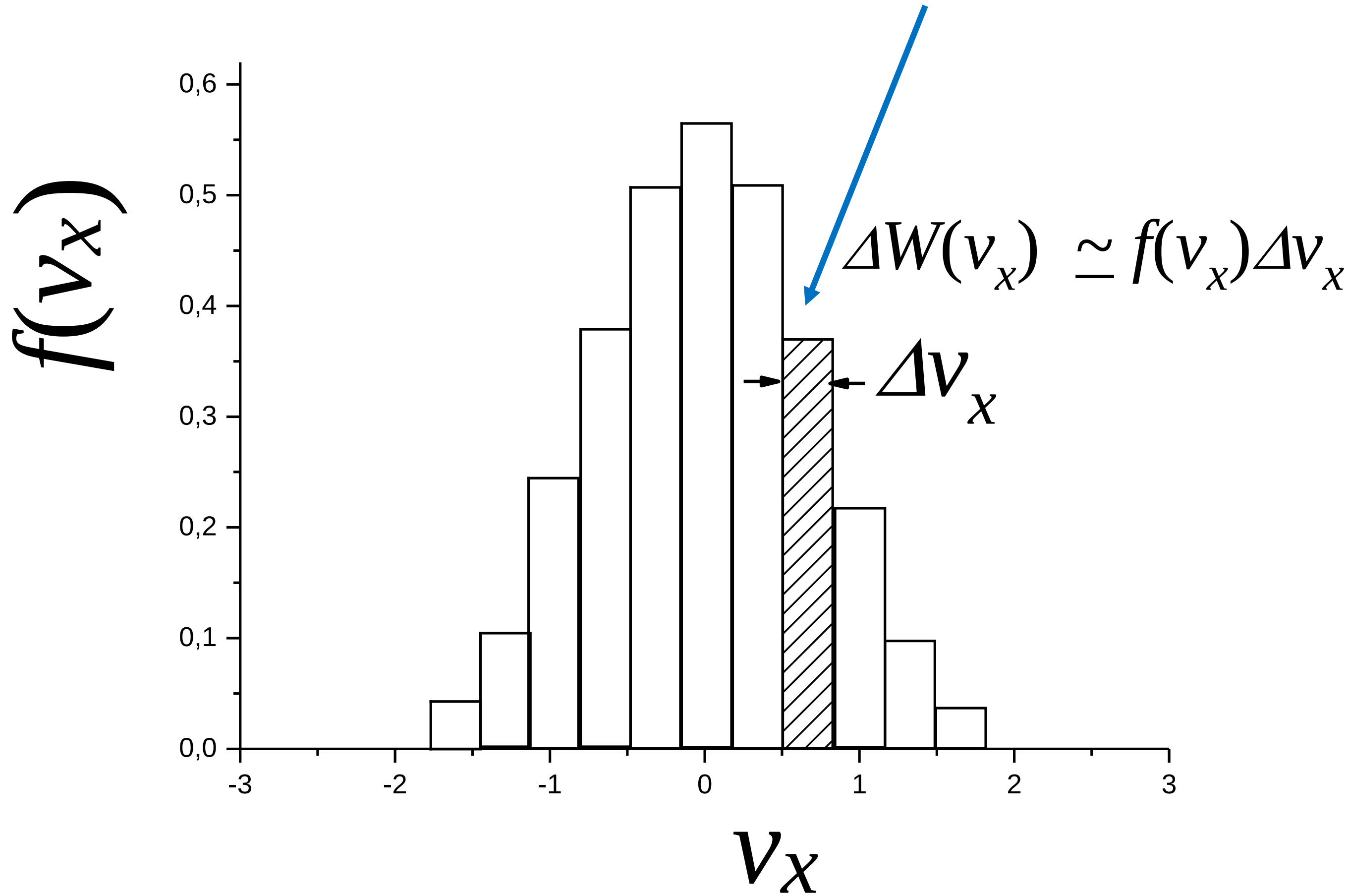
$$\sum_{i=1}^{M} W_i = 1$$

Сумма = 3, 4 …18



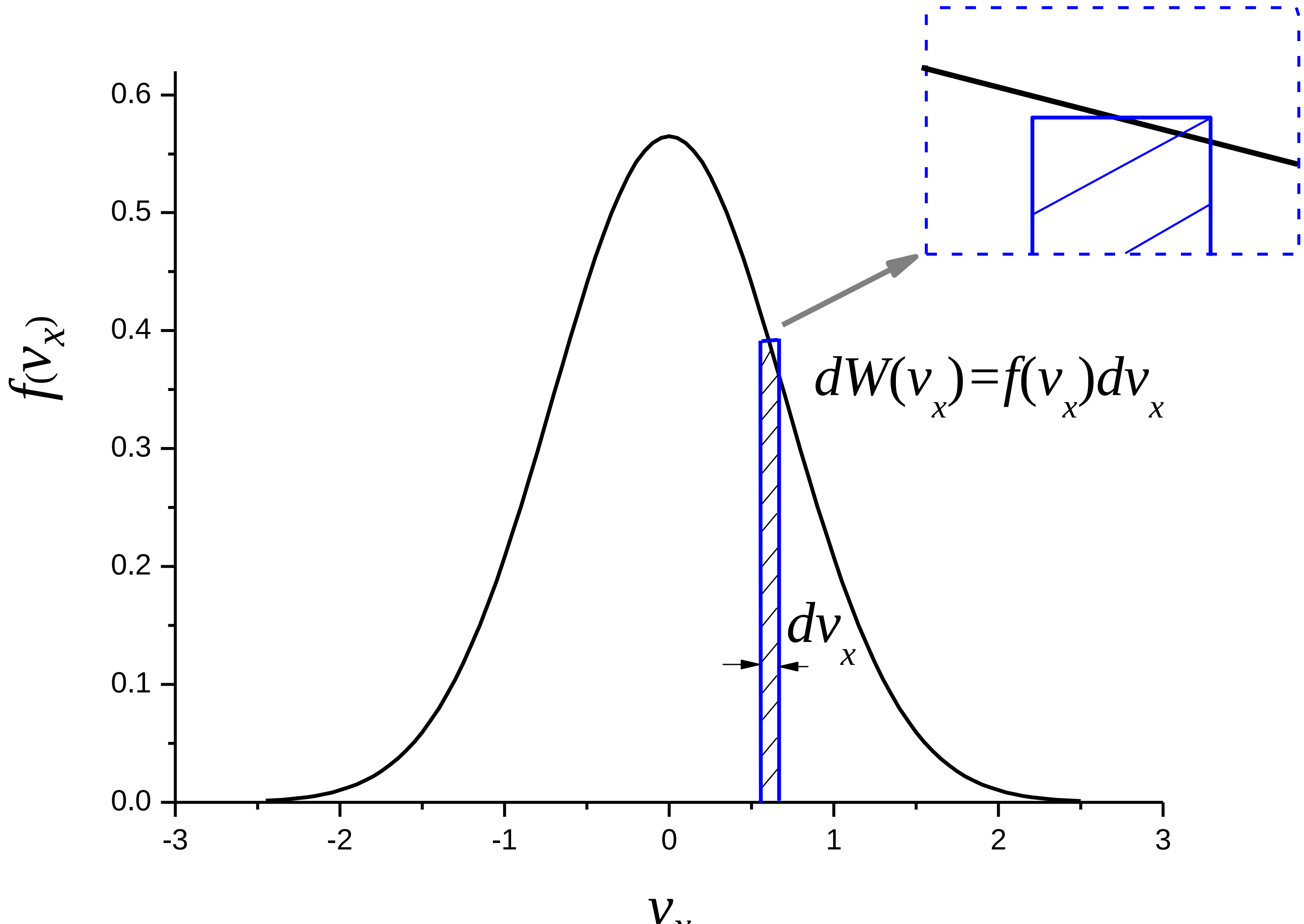
Для молекул: функция распределения по скоростям $\infty < v_x < \infty$

Разбиваем v_x на малые интервалы Δv_x



$\Delta W(v_x)$ – вероятность попадания в интервал от v_x до $v_x + \Delta v_x$.
Пропорциональна Δv_x с коэффициентом пропорциональности $f(v_x)$

Делаем Δv_x дифференциально малой величиной dv_x – получаем гладкую функцию распределения $f(v_x)$



Вероятность для проекций скоростей v_x иметь значение в интервале от v_x до $v_x + dv_x$ есть:

$$dW(v_x) = f(v_x)dv_x.$$

$$\overline{v}_x = \int v_x dW(v_x) = \int v_x f(v_x) dv_x \quad (= 0)$$

$$\overline{v_x^{\,2}} = \int v_x^{\,2} f(v_x) dv_x$$

$$dW(v_y) = f(v_y)dv_y$$
$$dW(v_z) = f(v_z)dv_z$$

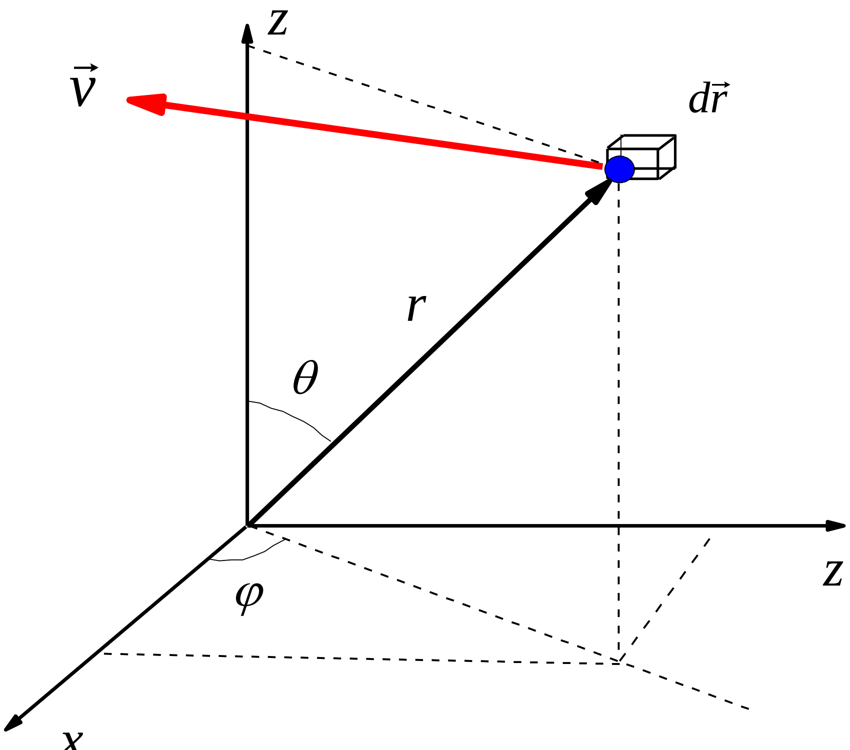
Системы координат в трехмерном пространстве

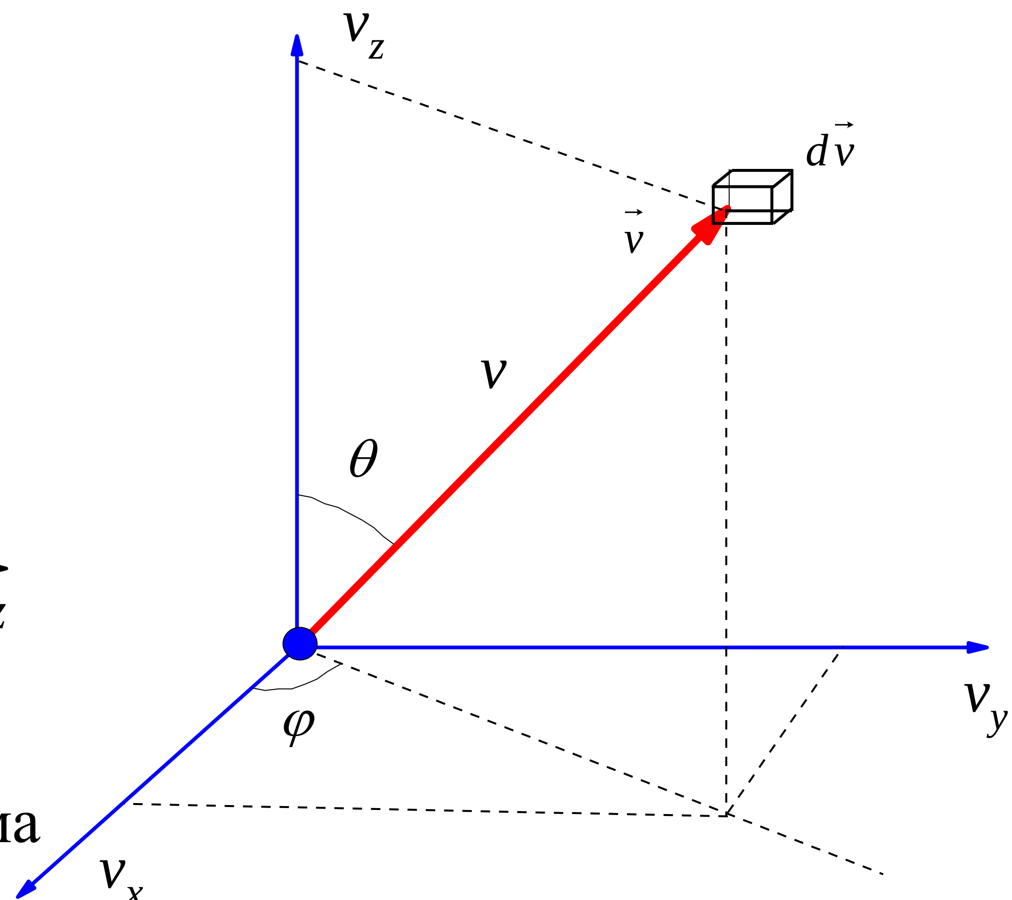
Обычное пространство

x, y, z

Пространство скоростей

v_x, v_y, v_z





Элемент объема

$$d\vec{r} = dxdydz$$

$$d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$$

Сферическая система координат: связь с декартовой системой

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$v_x = v\sin\theta\cos\varphi$$
$$v_y = v\sin\theta\sin\varphi$$
$$v_z = v\cos\theta$$

Элемент объема в сферической системе

$$d\vec{r} = r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi \qquad d\vec{v} = v^2 dv\sin\theta d\theta d\varphi$$

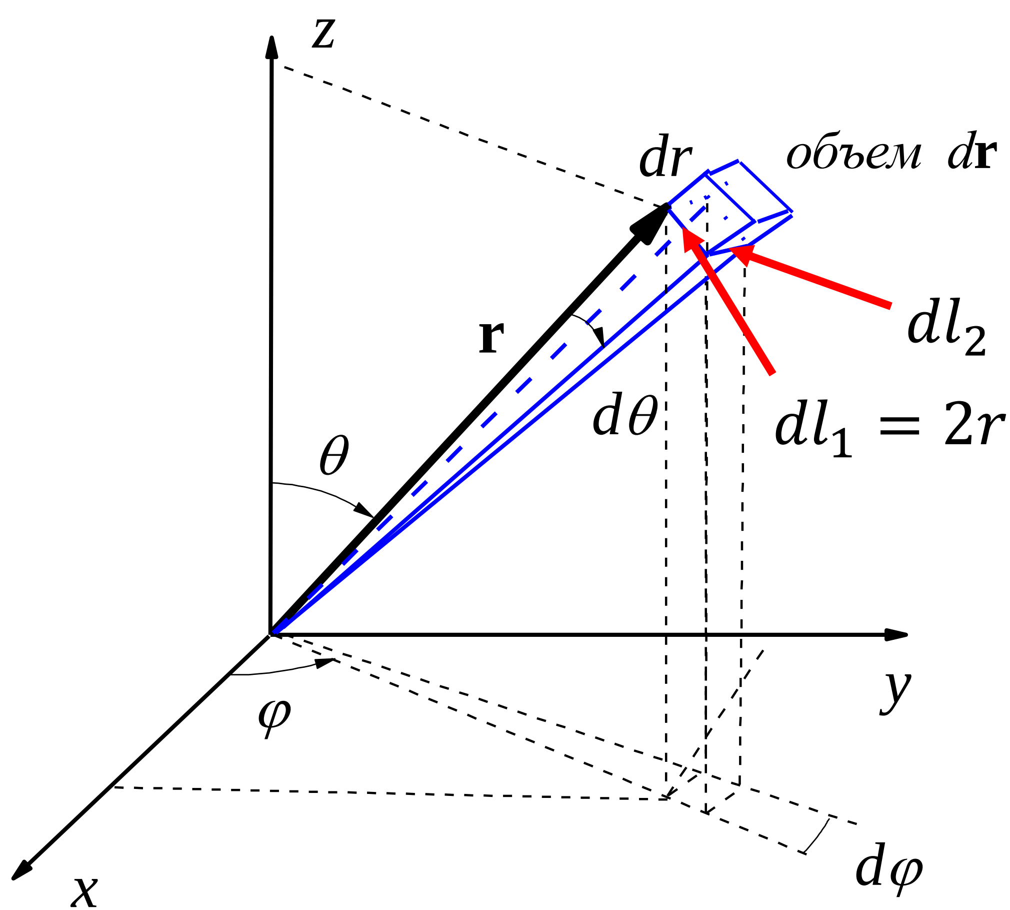
Теорема Пифагора в трехмерном пространстве:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Малый элемент объема при переходе из декартовой в сферическую систему координат преобразуется с помощью якобиана

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

$$dxdydz = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} drd\theta d\varphi = r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$$



$$dl_1 = 2r \cdot \sin(d\theta/2) \approx 2rd\theta/2 = rd\theta$$

$$dS = dl_1 dl_2 = (r \cdot d\theta)(r \cdot \sin\theta\, d\varphi) = r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

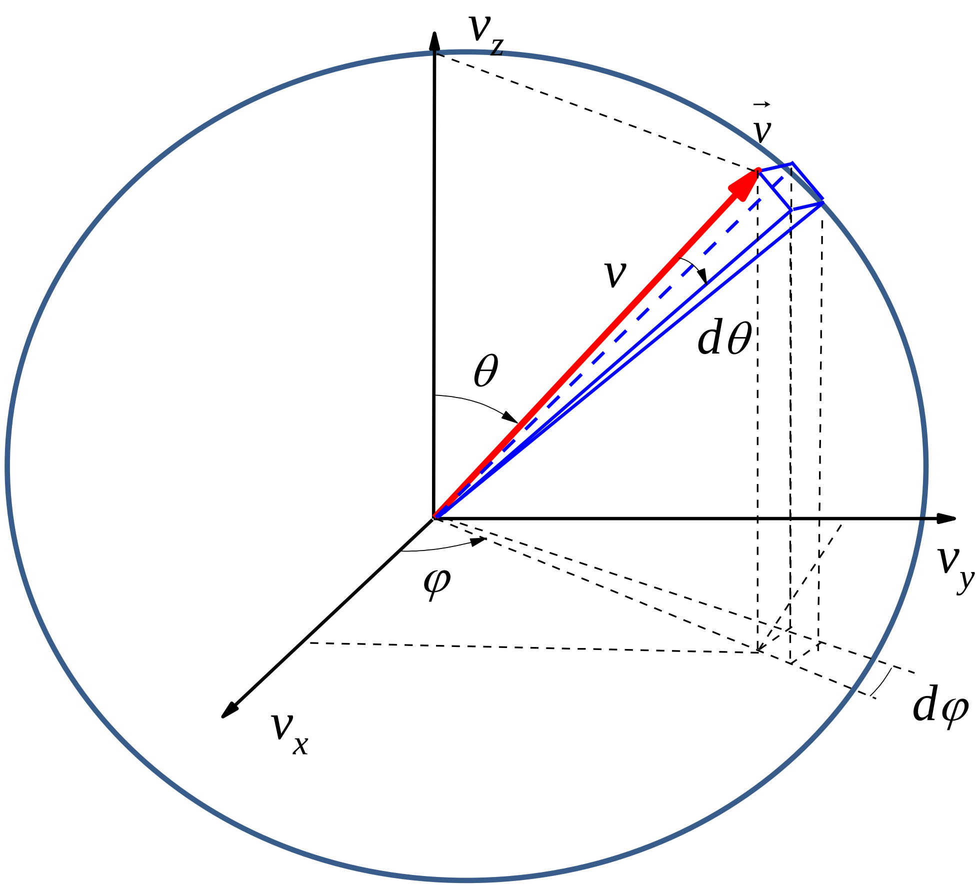
$r^2\sin\theta d\theta d\varphi$ - это площадь малого криволинейного четырехугольника на сфере радиуса r с вершинами, определяемыми углами θ, $\theta + d\theta$, φ, $\varphi + d\varphi$.

Домножаем на dr, получаем объем.

Функция распределения по направлениям движения

Малый элемент площади на сфере радиуса v

для лучей, лежащих в интервале
от θ до $\theta+d\theta$ и от φ до $\varphi+d\varphi$



$$dS = (v \cdot d\theta)(v \cdot \sin\theta d\varphi) =$$
$$v^2 \sin\theta d\theta d\varphi \equiv v^2 d\Omega$$

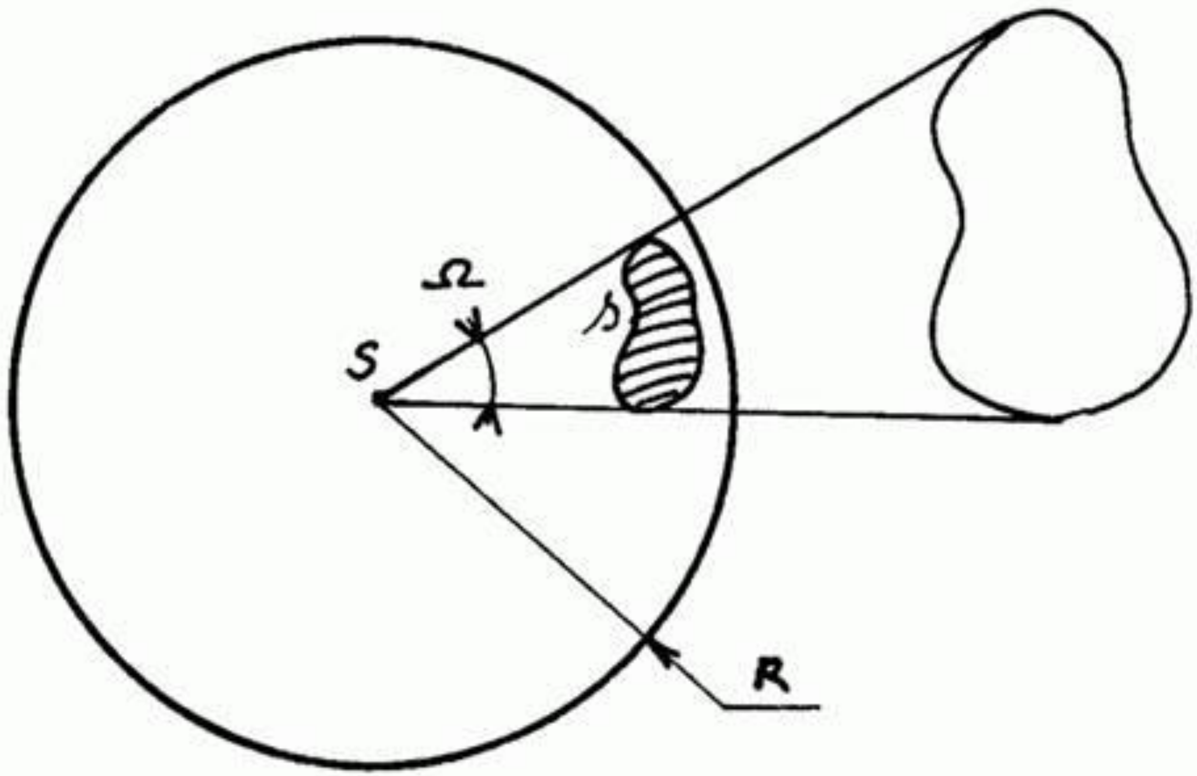
Ω - телесный угол

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

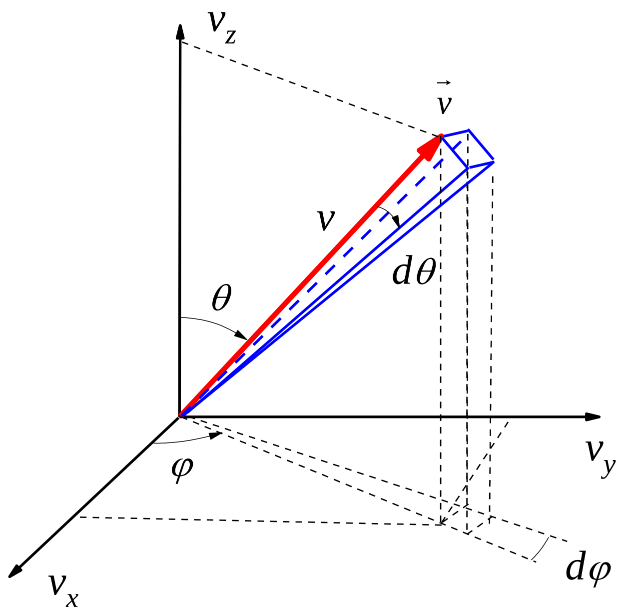
$$\int d\Omega \equiv \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi$$

ТЕЛЕСНЫЙ УГОЛ

- часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность



$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$



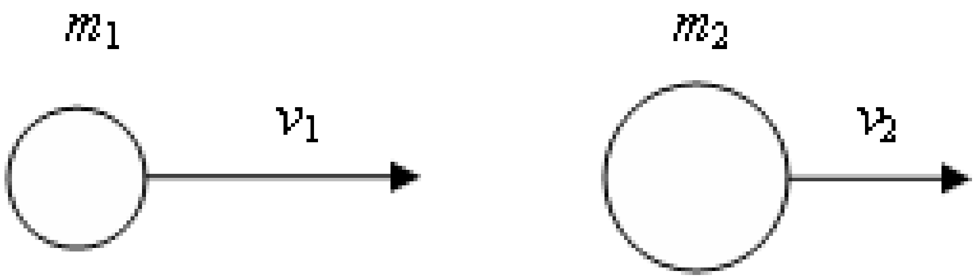
Так как все точки на сфере равновероятны, то вероятность молекуле иметь данное направление движения

$$dW(\theta,\varphi) = \frac{dS}{4\pi v^2} = \frac{1}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{4\pi}d\Omega$$

Функция распределения по ориентациям $f(\Omega)$ (равна константе)

Температура

Упругое столкновение двух шаров



Штрихами будем обозначать скорости после соударения

Законы сохранения энергии и импульса

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Скорость центра масс

$$V_{цм} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Замена переменных

$$v_1 = V_{цм} + u_1 \qquad v_1' = V_{цм} + u_1',$$

$$v_2 = V_{цм} + u_2 \qquad v_2' = V_{цм} + u_2'.$$

Новая система уравнений

$$m_1 u_1' + m_2 u_2' = 0,$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Решение :

$$u_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2),$$

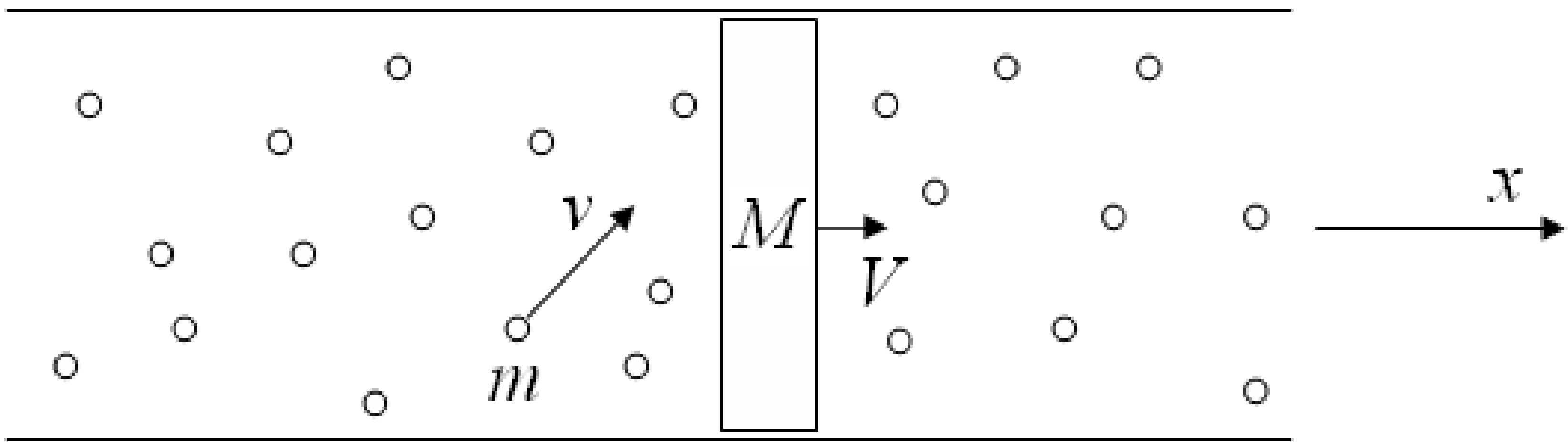
$$u_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

Переход обратно в лабораторную систему – окончательное решение:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$v'_2 = \frac{-(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}$$

Заполненный газом цилиндр с поршнем без трения



$$v_2' = \frac{2m_1v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Заменим
m_1 на m,
m_2 на M,
v_1 на v_x,
v_2 на V.

$$V' = \frac{2mv_x - (m - M)V}{m + M}$$

Возведем обе части в квадрат:

$$(m+M)^2V'^2 = 4m^2v_x^2 + 4m(M-m)v_xV + (M-m)^2V^2.$$

$$(m+M)^2 V'^2 = 4m^2 v_x^2 + 4m(M-m)v_x V + (M-m)^2 V^2.$$

Усредним по всем молекулам: $(m+M)^2\overline{V'^2}$

$$= 4m^2\overline{v_x^2} + 4m(M-m)\overline{v_x V} + (M-m)^2\overline{V^2}$$

Учтем, что $\overline{v_x V} = \overline{v_x}\,\overline{V} = 0$

$$\overline{V'^2} = \overline{V^2}$$

$$\Downarrow$$

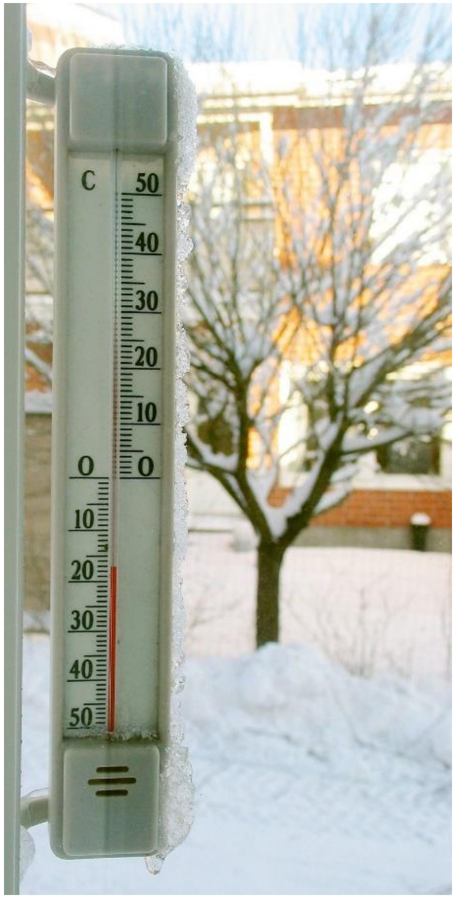
$$M\overline{V^2} = m\overline{v_x^2}.$$

Вывод: выравнивается кинетическая энергия поршня и молекул

Теорема Пифагора: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}M\overline{V^2} = \dfrac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{m\overline{v^2}}{2}$

Из опыта известно, что при контакте двух тел у них выравнивается температура

Поэтому определим температуру через среднеквадратичную скорость движения молекул идеального газа:

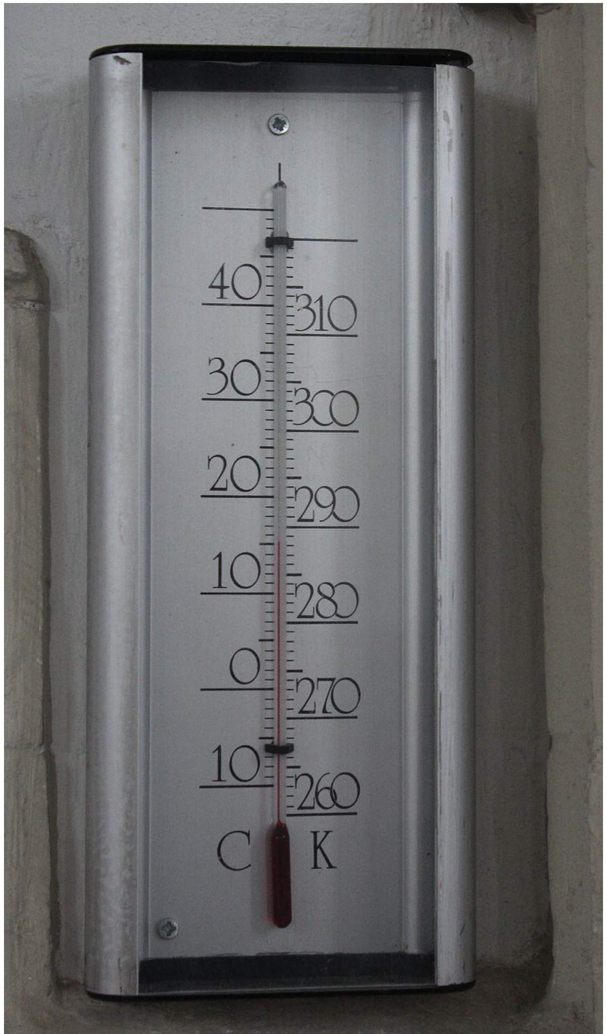


$$\frac{3}{2}kT = \frac{m\overline{v^2}}{2},$$

где $k = 1{,}38\cdot 10^{-16}$ эрг/К – постоянная Больцмана.

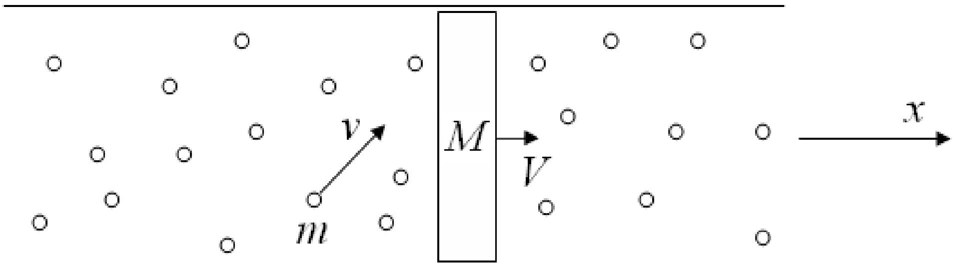
T измеряется в кельвинах.
Величина k выбрана так, чтобы *р*азница температур кипения и замерзания воды была 100 К.

$K = {}^{o}C + 273,15.$

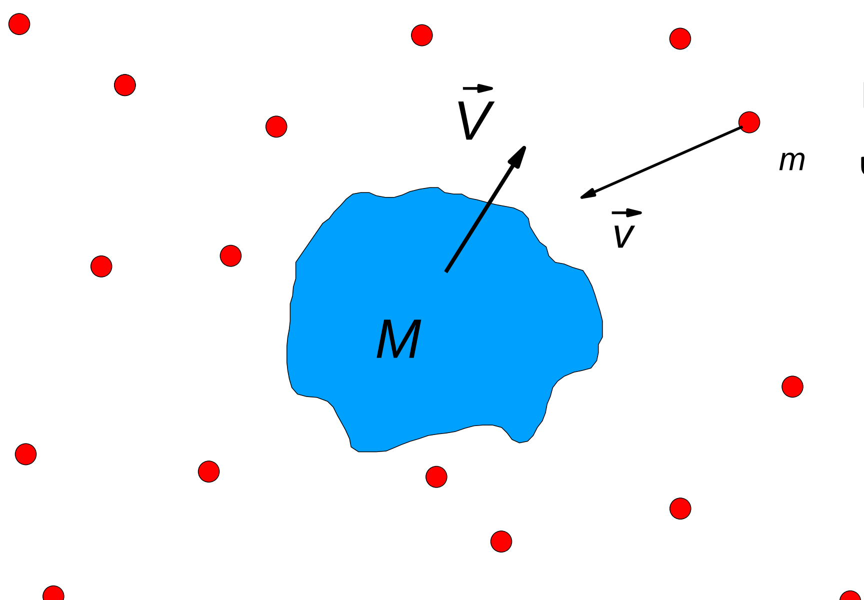


Уильям Томсон (лорд Кельвин)
1824 - 1907

Другое важное следствие рассмотренной задачи:
Макроскопический поршень ведет себя как малая молекула



$$M\overline{V^2} = m\overline{v_x^2}.$$



Взвешенная в воздухе или воде макроскопическая частица тоже «молекула»

$$M\frac{\overline{V^2}}{2} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$$

Распределение Максвелла

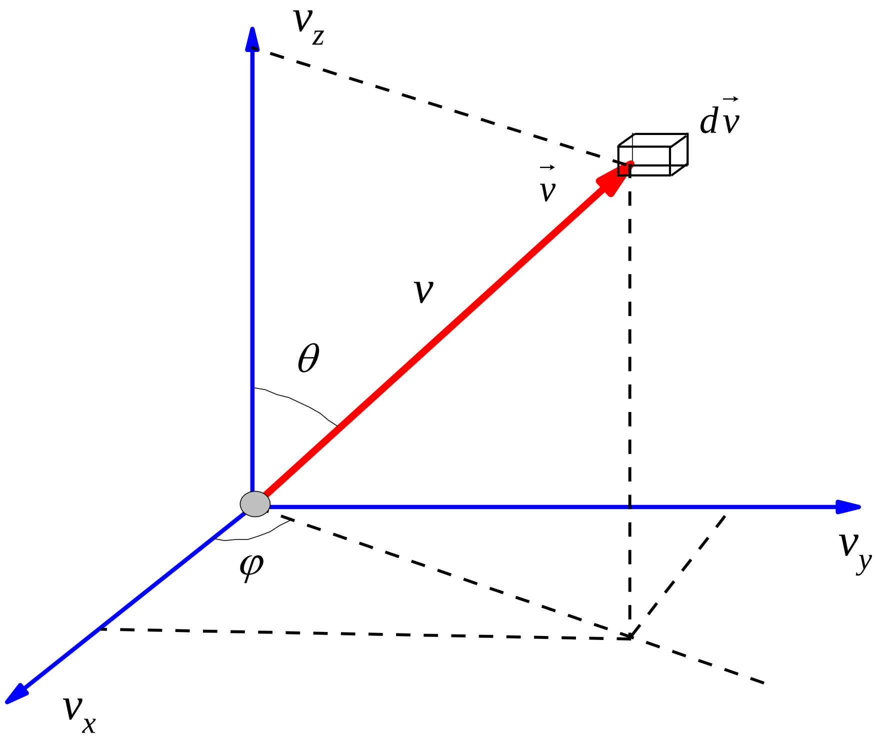
Джеймс Клерк Максвелл

1831 – 1879

$$dW(v_x) = f(v_x)dv_x,$$
$$dW(v_y) = f(v_y)dv_y,$$
$$dW(v_z) = f(v_z)dv_z.$$

Равнозначность направлений движения: вид функции распределения один и тот же для v_x, v_y и v_z

Вероятность $dW(\vec{v})$ иметь определенное значение вектора скорости $\vec{v}$



$$dW(\vec{v}) = g(\vec{v})\,d\vec{v}\,.$$

$$\int dW(\vec{v}) = \iiint g(\vec{v})d\vec{v} = 1$$

Движения вдоль трех осей независимы, поэтому вероятности перемножаются:

$$dW(\vec{v}) = dW(v_x)dW(v_y)dW(v_z)$$

От направления ничего не зависит: $g(\vec{v}) = g(v)$

$$g(v) = f(v_x) \cdot f(v_y) \cdot f(v_z).$$

$$\ln(g(v)) = \ln(f(v_x)) + \ln(f(v_y)) + \ln(f(v_z))$$

$$\ln(g(v)) = \ln(f(v_x)) + \ln(f(v_y)) + \ln(f(v_z))$$

Дифференцируем по v_x $$\frac{d\ln(g(v))}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{d\ln(f(v_x))}{dv_x}.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{1}{2}\frac{2v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x}{v}$$

$$\frac{1}{v}\frac{d\ln(g(v))}{dv} = \frac{1}{v_x}\frac{d\ln(f(v_x))}{dv_x} \qquad \frac{d\ln g(v)}{dv^2} = \frac{d\ln f(v_x)}{dv_x^2}$$

$$\frac{d\ln g(v)}{dv^2} = \frac{d\ln f(v_x)}{dv_x^2} = \frac{d\ln f(v_y)}{dv_y^2} = \frac{d\ln f(v_z)}{dv_z^2}$$

$$\frac{d\ln f(v_x)}{dv_x^2} = \frac{d\ln f(v_y)}{dv_y^2} = \frac{d\ln f(v_z)}{dv_z^2} = const \quad (= \frac{d\ln g(v)}{dv^2})$$

Константа, так как v_x, v_y, v_z меняются друг от друга независимо

$$\frac{d\ln f(v_x)}{dv_x^2} = -\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\ln f(v_{x(y,z)}) = -\alpha v_{x(y,z)}^2 + const$$

Потенцируем:

$$f(v_x) = \frac{1}{Z}\exp(-\alpha v_x^2)$$

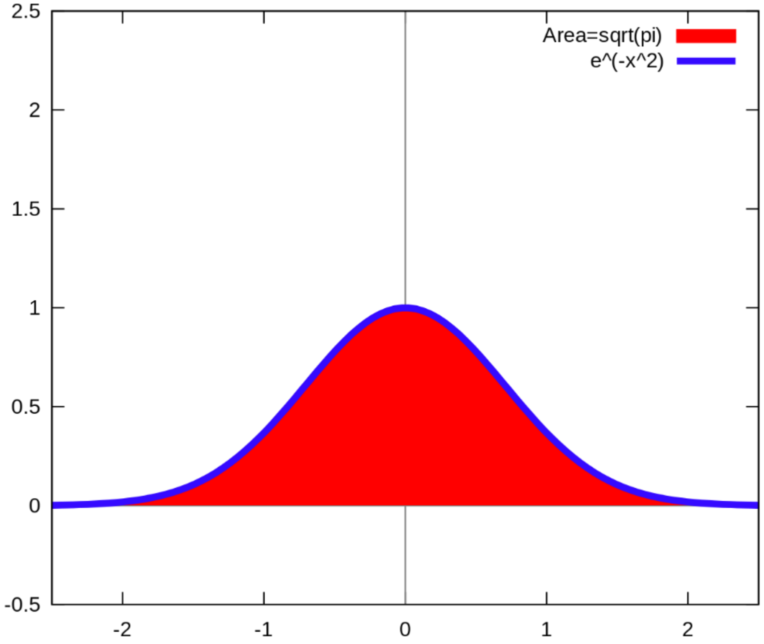
$$Z = \exp(-const)$$

$$g(v) = \frac{1}{Z'}\exp(-\alpha v^2) \qquad Z' = Z^3$$

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \exp(-\alpha v_x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Гауссов интеграл (интеграл Эйлера-Пуассона)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$



$$dW(v_{x(y,z)}) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\exp(-\alpha v_{x(y,z)}^2)dv_{x(y,z)}$$

$$dW(\vec{v}) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\exp(-\alpha v^2)d\vec{v}$$

$$d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$$

$$d\mathbf{v} = v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\overline{v_x^2} = \int_0^1 v_x^2 dW(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp(-\alpha v_x^2) dv_x$$

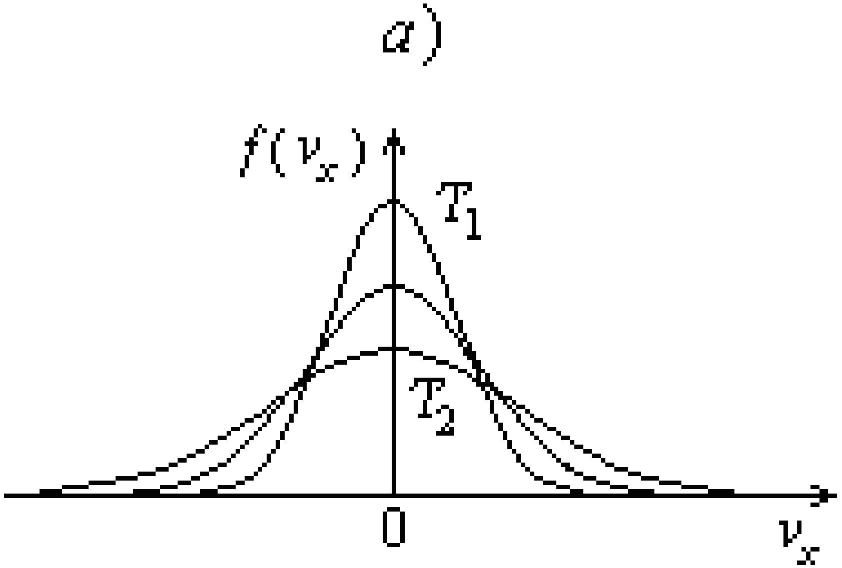
$$= -\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha v_x^2) dv_x = -\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha}.$$

$$\frac{1}{2} m\overline{v_x^2} = \frac{1}{2} m\overline{v_y^2} = \frac{1}{2} m\overline{v_z^2} = \frac{kT}{2}.$$

$$\Downarrow$$

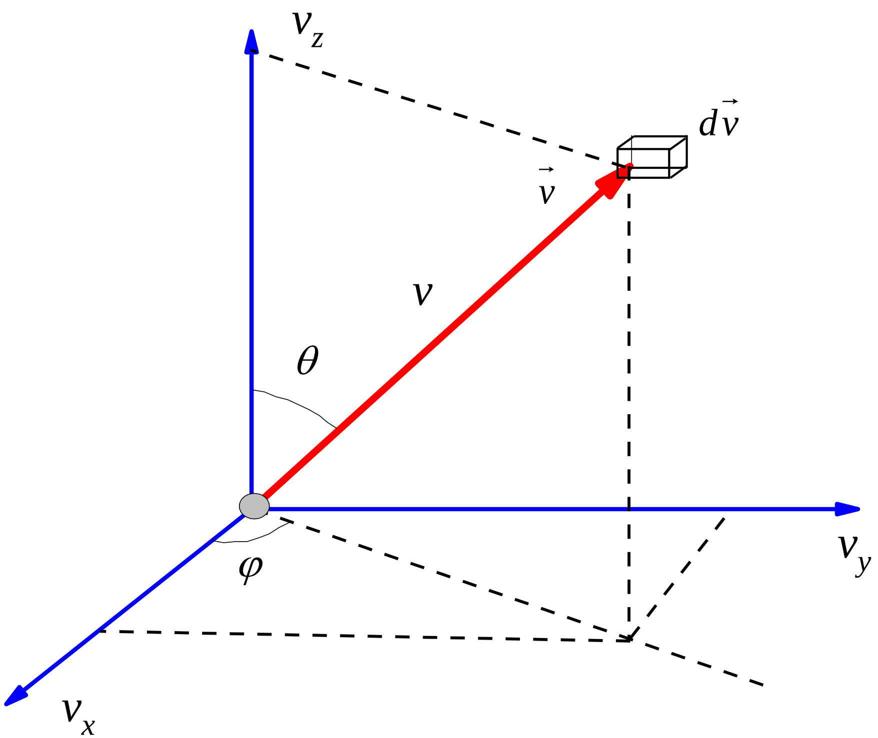
$$\alpha = \frac{m}{2kT}.$$

$$dW(v_{x(y,z)}) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_{x(y,z)}^2}{2kT}\right) dv_{x(y,z)}$$



Одномерное распределение Максвелла

Трехмерное распределение Максвелла



$$dW(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z$$

$$dW(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\vec{v}$$

В сферических координатах

$$dW(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi$$